Musterlösung **12. Jgst.** **1. Test** **Datum: 14.10.2005**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: **Ganzrat. Parameterfunktionen, Steckbriefaufgaben, Extremwertaufgaben und Newton-Iteration**

---

❶ **Extremwertaufgabe I**

Ein Rechteck habe den Umfang 12 cm. Wie lang sind die Seiten zu wählen, damit das Rechteck maximalen Flächeninhalt besitzt?

Lösung:

$$\text{Nebenbedingung}: \quad 2a+2b=12 \quad \Rightarrow \quad a=6-b$$

$$\text{Zielfunktion}: \quad f(a,b)=a\cdot b$$

$$\xrightarrow{\text{NB in ZF}} \quad f(b) = (6-b)\cdot b = 6b-b^2$$

$$\xrightarrow{\text{Ableitung}} \quad f'(b) = 6-2b \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b=3 \quad \Rightarrow \quad a=3$$

$$f''(b) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(3\mid 9)$$

$$\text{Randwerte}: \quad D=[0;6] \quad ; \quad f(0)=0 \quad \text{und} \quad f(6)=0$$

❷ **Extremwertaufgabe II**

Ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck soll zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+13{,}5$ und der x-Achse einbeschrieben werden.

Ermitteln Sie den maximal möglichen Flächeninhalt und die Koordinaten der vier Eckpunkte des Rechtecks.

Lösung:

$$\text{Zielfunktion}: \quad f(a,b)=a\cdot b$$

$$\xrightarrow{\text{Randfunktion in ZF}} \quad f(t) = 2t\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{27}{2}\right) = -t^3+27t$$

$$\xrightarrow{\text{Ableitung}} \quad f'(t) = -3t^2+27 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |t|=3$$

$$f''(t) = -6t \quad \Rightarrow \quad f''(3) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(3\mid 54)$$

❸ **Ganzrationale Parameterfunktion**

Untersuchen Sie die gegebene Funktion

$$f_k(x) = x^4 - kx^2 \quad mit\ k > 0$$

hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Symmetrie b) Nullstellen c) Extremwerte
d) Wendepunkte e) Ortskurve der Extremwerte

Lösung:

$$Symmetrie: \quad f_k(-x) = (-x)^4 - k(-x)^2 = x^4 - kx^2 = f_k(x)$$

$$\Rightarrow \quad Achsensymmetrie$$

$$Nullstellen: \quad x^2\left(x^2 - k\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{k}$$

$$Extremwert:$$

$$f_k'(x) = 4x^3 - 2kx \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(2x^2 - k\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2k}$$

$$f_k''(x) = 12x^2 - 2k \quad \Rightarrow \quad f_k''(0) = -2k < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$

$$f_k''(x) = 12x^2 - 2k \quad \Rightarrow \quad f_k''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2k}\right) = 4k > 0$$

$$\Rightarrow \quad Min_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2k} \;\middle|\; -\frac{1}{4}k^2\right) \quad \wedge \quad Min_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2k} \;\middle|\; -\frac{1}{4}k^2\right)$$

$$Wendepunkt:$$

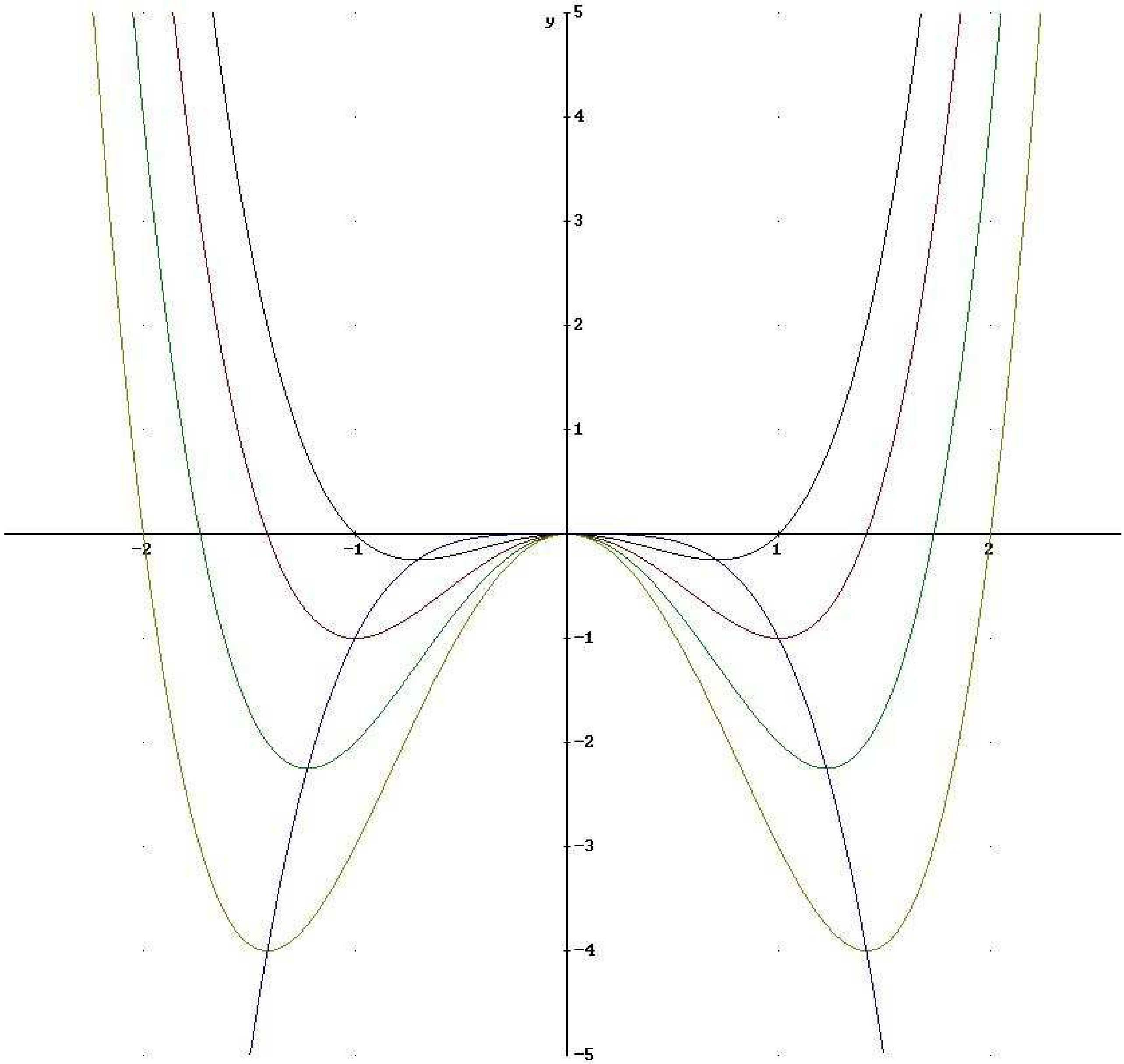
$$f_k''(x) = 12x^2 - 2k \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{1}{6}\sqrt{6k}$$

$$f_k'''(x) = 24x \quad \Rightarrow \quad f_k'''\left(\frac{1}{6}\sqrt{6k}\right) = 4\sqrt{6k} \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{1}{6}\sqrt{6k} \;\middle|\; -\frac{5}{36}k^2\right)$$

$$Ortskurve\ der\ Extrema:$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2k} \xrightarrow{\cdot 2} 2x = \sqrt{2k} \xrightarrow{quadrieren} 4x^2 = 2k \xrightarrow{:2} 2x^2 = k$$

$$y = -\frac{1}{4}k^2 \xrightarrow{k = 2x^2\ einsetzen} y = -\frac{1}{4}\left(2x^2\right)^2 \xrightarrow{ausrechnen} y = -x^4$$



❹ **WANTED: Steckbriefaufgaben**

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

O (0 / 0) ist relativer Tiefpunkt des Graphen, 2 ist eine Wendestelle und die zugehörige Wendetangente besitzt die Steigung 4.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$I.)\quad P(0 \mid 0) \quad \Rightarrow \quad d = 0$

$II.)\quad$ x = 0 ist Extremstelle $\quad \Rightarrow \quad c = 0$

$III.)\quad$ x = 2 ist Wendestelle $\quad \Rightarrow \quad 12a + 2b = 0$

$IV.)\quad$ Wendetangente mit m = 4 $\quad \Rightarrow \quad 12a + 4b = 4$

$$\Rightarrow \quad f(x) \quad = \quad -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$$

❺ **Newton-Iteration I**

Bestimmen Sie einen bis auf zwei Nachkommastellen genauen Näherungswert einer Lösung der angegebenen Gleichung:

$$x^3 + 2x + 1 \quad = \quad 0$$

Lösung:

$f(x) = 1x^3 + 0x^2 + 2x^1 + 1x^0$

$f'(x) = 3x^2 + 0x^1 + 2x^0$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0	1	2	-0.5
1	-0.5	-0.125	2.75	-0.4545454
2	-0.45454	-0.0030052	2.61983	-0.4533983
3	-0.453398	-1.79287153035E-006	2.61671	-0.4533976
4	-0.453397	-6.38600283764E-013	2.61670	-0.4533976
5	-0.453397	0	2.61670	-0.4533976

❻ Newton-Iteration II und Steckbriefaufgabe

Schüler, die keine Differentialrechnung beherrschen, können mit Hilfe des Heronverfahrens sehr genaue Werte für Wurzelausdrücke berechnen.

Dieses Verfahren basiert auf der Newton-Iteration.

Die Formel nach Heron für $\sqrt{a}$ lautet: $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

Ihre Aufgabe besteht nun darin, aus dem Ansatz der Newton-Iteration die obige Formel für den Ausdruck $\sqrt{2}$ herzuleiten.

Aufgabenstellung 1:

Finden Sie eine Funktion zweiten Grades, die $\sqrt{2}$ als Nullstelle besitzt.

Lösung: $f(x) = x^2 - 2$

Aufgabenstellung 2:

Setzen Sie diese Funktion und ihre Ableitung in die Newton-Iterationsformel ein und leiten Sie den gesuchten Ausdruck her.

Lösung:

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$Ansatz:$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,2} - 2}{2x_n}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,2}}{2x_n} + \frac{2}{2x_n}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{2}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{x_n}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\,ausklammern} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$