Musterlösung **12. Jgst.** **2. Test** **Datum: 09.12.2005**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: Integralrechnung

---

❶ Ermitteln Sie für folgende Randfunktionen eine Stammfunktion.

a) $f(x) = 4x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ d) $f_t(x) = \frac{tx^3 - t^2 x}{x^2}$

Lösung:

a) $f(x) = 4x^2 + 2x - 1 \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 - x + c$

b) $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = -\frac{4}{x} + 2\ln|x| + c$

c) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

d) $f_t(x) = \frac{tx^3 - t^2 x}{x^2} \xrightarrow{\text{Zerlegen}} f_t(x) = tx - \frac{t^2}{x}$

$\rightarrow \quad F_t(x) = \frac{t}{2}x^2 - t^2 \ln|x| + c$

❷ Für welche Werte $a \in \Re$ gilt?

a) $\int_0^a x\,dx = 4$

Lösung:

$$\int_0^a x\,dx = 4 \xrightarrow{\text{Stammfunktion}} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = 4$$

$$\xrightarrow{\text{Grenzen einsetzen}} \frac{1}{2}a^2 = 4 \xrightarrow{\text{Gleichung lösen}} |a| = \sqrt{8}$$

b) $$\int_a^{2a} \frac{9}{x^2}\,dx = 9$$

Lösung:

$$\int_a^{2a} \frac{9}{x^2}\,dx = 9 \xrightarrow{\text{Stammfunktion}} \left[-\frac{9}{x}\right]_a^{2a} = 9$$

$$\xrightarrow{\text{Grenzen einsetzen}} -\frac{9}{2a} - \left(-\frac{9}{a}\right) = 9$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichung lösen}} -\frac{9}{2a} + \frac{9}{a} = 9 \xrightarrow{:9} -\frac{1}{2a} + \frac{1}{a} = 1 \xrightarrow{\cdot 2a} a = \frac{1}{2}$$

❸ **Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [a;b].**

$$\int_0^3 \left(x^3 - 1\right)dx$$

Lösung:

$$1.)\ Nullstellen: \quad x^3 - 1 = 0 \xrightarrow{+1\, und\, \sqrt[3]{\ }} x = 1$$

2.) absoluter Flächeninhalt:

$$\int_0^3 \left(x^3-1\right)dx = \left|\int_0^1 \left(x^3-1\right)dx\right| + \int_1^3 \left(x^3-1\right)dx =$$

$$\left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_0^1\right| + \left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_1^3 = \left|\frac{1}{4} - 1\right| + \left[\left(\frac{1}{4}\cdot 81 - 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right]_1^3 =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{69}{4} + \frac{3}{4} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$$

❹ **Konsumenten und Produzentenrente**

Gegeben seien die Angebotsfunktion $p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 9$ und die Nachfragefunktion $p_N(x) = 36 - \frac{1}{4}x^2$.

Man ermittle

a) das Marktgleichgewicht und b) die Konsumentenrente

Lösung:

a) Marktgleichgewicht:

$$p_A(x) = p_N(x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + 9 = 36 - \frac{1}{4}x^2 \quad \rightarrow \quad |x| = 6$$

nur x = 6 als Lösung sinnvoll

$$p_N(6) = 27 \quad \rightarrow \quad M(6 \mid 27)$$

b) Konsumentenrente:

$$K_R \quad = \quad \int_0^6 \left(36 - \frac{1}{4}x^2\right) dx \; - 6 \cdot 27 \quad = \quad \left[36x - \frac{1}{12}x^3\right]_0^6 - 162$$

$$K_R \quad = \quad 36$$

❺ **Uneigentliches Integral**

Lösen Sie folgende drei Integrale:

a) $\lim\limits_{a \to \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$ b) $\lim\limits_{a \to 0} \int_a^2 \frac{1}{x}\,dx$ c) $\lim\limits_{a \to \infty} \int_{\frac{1}{a}}^2 \frac{1}{x^{-3}}\,dx$

<u>Lösung:</u>

a) $$\lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{a}\right] - (-1) = 1$$

b) $$\lim_{a \to 0} \int_a^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a \to 0} \left[\ln|x|\right]_a^2 = \ln(2) - \lim_{a \to 0}\left(\ln|a|\right) = \infty$$

Die Fläche besitzt keinen Grenzwert.

c) $$\lim_{a \to \infty} \int_{\frac{1}{a}}^2 \frac{1}{x^{-3}}\,dx = \int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4$$