Musterlösung **12. Jgst.** **4. Test** **Datum: 31.03.2005**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Rechenoperationen mit Matrizen**

---

❶ Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen

a) Jede Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix.

Lösung: *richtig*

b) Jede Dreiecksmatrix ist eine Einheitsmatrix.

Lösung: *falsch*

c) Jede quadratische Nullmatrix ist eine Diagonalmatrix.

Lösung: *richtig*

d) Nicht jede Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix.

Lösung: *falsch*

❷ Ökonomische Anwendungen

Gegeben seien folgende beiden Produktionsmatrizen:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad und \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Anzahl der notwendigen Rohstoffe zur Herstellung von je einem Endprodukt jeden Typs.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 41 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}$$

Insgesamt sollen nun 20 ME von E_1 und 10 ME von E_2 produziert werden.
Die Rohstoffpreise betragen 3t GE für R_1 und 4t GE für R_2.

b) Wie viele Rohstoffe werden zur Abwicklung des Auftrags benötigt?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 21 & 41 \\ 18 & 37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 830 \\ 730 \end{pmatrix}$$

c) Wie hoch sind die anteiligen Rohstoffkosten je Endprodukt.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3t & 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 41 \\ 18 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135\,t & 271\,t \end{pmatrix}$$

❻ Grundlegende Rechenoperationen zu Matrizen

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Führen Sie folgende Rechenoperationen aus:

a) A + 2B   b) $E^T + A * B^T$ c) $A^2 - 3E$

Lösung:

$$a)\quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 8 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

❸ Lösen von LGS

Ermitteln Sie die Lösungen der LGS:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 3 & -1 & -4 \\ II.) & 2 & -4 & 3 & 17 \\ III.) & -5 & 2 & 1 & -9 \end{array} \xrightarrow[III.)+5\cdot I.)]{II.)-2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 3 & -1 & -4 \\ II.) & 0 & -10 & 5 & 25 \\ III.) & 0 & 17 & -4 & -29 \end{array} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 3 & -1 & -4 \\ II.) & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ III.) & 0 & 17 & -4 & -29 \end{array} \xrightarrow[I.)-3\cdot II.)]{III.)-17\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ II.) & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ III.) & 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{27}{2} \end{array} \xrightarrow{\frac{2}{9}\cdot III.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ II.) & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \xrightarrow[II.)+\frac{1}{2}\cdot III.)]{I.)-\frac{1}{2}\cdot III.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & -1 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l|ccc|l} I.) & 3 & 2 & 0 & -8 \\ II.) & 1 & 6 & 2 & -6 \\ III.) & 5 & -2 & -2 & 1 \end{array} \xrightarrow{I.) \leftrightarrow II.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|l} I.) & 1 & 6 & 2 & -6 \\ II.) & 3 & 2 & 0 & -8 \\ III.) & 5 & -2 & -2 & 1 \end{array} \xrightarrow[III.)-5\cdot I.)]{II.)-3\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|l} I.) & 1 & 6 & 2 & -6 \\ II.) & 0 & -16 & -6 & 10 \\ III.) & 0 & -32 & -12 & 31 \end{array} \xrightarrow{III.)-2\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|l} I.) & 1 & 6 & 2 & -6 \\ II.) & 0 & -16 & -6 & 10 \\ III.) & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array} \Rightarrow \quad L = (\quad) = \varnothing$$

❹ Erstellen Sie je eine 4x4-Matrix, für deren Elemente gilt

a) $a_{i\,j} = \begin{cases} i^2 & \text{für } i \le j \\ -j & \text{sonst} \end{cases}$

b) $b_{i\,j} = \begin{cases} i-j & \text{für } i < j \\ 1-j & \text{für } i = j \\ 2i & \text{für } i > j \end{cases}$

Lösung:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 9 & 9 \\ -1 & -2 & -3 & 16 \end{pmatrix} \qquad b) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & -2 & -1 \\ 8 & 8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Definieren Sie in der Form der Teilaufgaben a) und b) eine Einheitsmatrix.

Lösung:

$$a_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

❺ **Beweisen Sie folgende Aussagen mittels einer allgemeinen 2x2-Matrix**

a) A * E = A

b) A * A^T ist nicht kommutativ

Lösung:

$$a) \quad A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$b) \quad \left.\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2 \end{pmatrix} \\ A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot A^T \neq A^T \cdot A$$