Musterlösung	**13. Jgst.**	**2. Test**	**Datum: 28.11.2006**
	Klasse: GY 04 c	**Fach: Mathematik (Leistungsfach)**	

Themen: **Binomial- und Hypergeometr. Verteilung; Erwartungswert; Varianz; Totale Wahrscheinlichkeit; Satz von Bayes**

1.) Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Gruppe besteht aus 8 Männern und 5 Frauen. Die beiden Sprecher der Gruppe sollen durch Losentscheid ermittelt werden. Jeder Name wird auf einen Zettel geschrieben, anschließend werden zwei Zettel gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Frauen Sprecherinnen der Gruppe werden?

Lösung:

$$H(X=2) = \frac{\binom{8}{0}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{1\cdot 10}{78} = \frac{5}{39} \quad oder: \quad H(X=2) = \frac{5\cdot 4}{13\cdot 12} = \frac{20}{156} = \frac{5}{39}$$

2.) Erwartungswert bei Glücksspielen

Harry Neunmalklug veranstaltet ein Gewinnspiel. Einsatz: 2,00 €.
Würfeln mit einem Tetraeder (Vierflach).
Wer eine „1“ würfelt erhält 5,00 € ausgezahlt, eine „4“ wird mit einer Auszahlung von 2,50 € honoriert, bei den anderen beiden Zahlen gibt es nichts.

a) Lohnt sich dieses Spiel auf lange Sicht für Harry?

Lösung:

Ja, das Spiel lohnt sich für Harry, da der Erwartungswert aus Harrys Sicht positiv ist.

	A	B	C	D	E	F
1	Aufgabe a)					
2	X=k	1	2	3	4	
3	P(X=k)	1/4	1/4	1/4	1/4	
4	Gewinn	3	-2	-2	0,5	
5	E(X=k)	3/4	- 1/2	- 1/2	1/8	- 1/8

b) Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel „fair“ ist?

Lösung:

$$E(X) = (5-a)\cdot\frac{1}{4}+(-a)\cdot\frac{1}{4}+(-a)\cdot\frac{1}{4}+(2{,}5-a)\cdot\frac{1}{4} = 0$$

$$E(X) = 7{,}5-4a = 0 \Rightarrow a = \frac{7{,}5}{4} \Rightarrow a = 1{,}875$$

oder mittels Excel (Zielwertsuche):

	A	B	C	D	E	F
7	Aufgabe b)					
8	X=k	1	2	3	4	
9	P(X=k)	1/4	1/4	1/4	1/4	
10	Einzahlung	1,875	1,875	1,875	1,875	
11	Auszahlung	5	0	0	2,5	
12	E(X=k)	0,78125	-0,4688	-0,4688	0,15625	0

Formelansicht:

	A	B	C	D	E	F
1	Aufgabe a)					
2	X=k	1	2	3	4	
3	P(X=k)	0,25	0,25	0,25	0,25	
4	Gewinn	3	-2	-2	0,5	
5	E(X=k)	=B3*B4	=C3*C4	=D3*D4	=E3*E4	=SUMME(B5:E5)
6						
7	Aufgabe b)					
8	X=k	1	2	3	4	
9	P(X=k)	0,25	0,25	0,25	0,25	
10	Einzahlung	1,875	=B10	=C10	=D10	
11	Auszahlung	5	0	0	2,5	
12	E(X=k)	=B9*(B11-B10)	=C9*(C11-C10)	=D9*(D11-D10)	=E9*(E11-E10)	=SUMME(B12:E12)

3.) **Glühbirnen**

Bei der Produktion Glühbirnen entsteht etwa 15 % Ausschuss. Es werden 50 Birnen mit Zurücklegen entnommen.

a) Wie viele defekte Glühbirnen sind im Mittel zu erwarten?

Lösung:

$$\mu \quad = \quad 50 \cdot 0{,}15 \quad = \quad 7{,}5$$

b) Wie hoch sind Varianz und Standardabweichung?

Lösung:

$$\sigma^2 \quad = \quad 50 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 \quad = \quad 6{,}375 \quad \Rightarrow \quad \sigma \quad = \quad \sqrt{6{,}375} \quad \approx \quad 2{,}525$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der defekten Glühbirnen im Intervall mit dem Radius σ liegt?

Lösung:

$$B_{50\,;\,0{,}15}\left(\left|X-\mu\right| \le \sigma\right) \quad = \quad B_{50\,;\,0{,}15}\left(\left|X-7{,}5\right| \le 2{,}52\right) \quad \overset{7{,}5 \pm 2{,}52}{=} \quad B\left(5 \le X \le 10\right)$$

$$NR: \quad \left|X-7{,}5\right| \le 2{,}52$$

$$\Rightarrow \quad Fall\,1: \quad X-7{,}5 \le 2{,}52 \quad \Rightarrow \quad X \le 10{,}02$$

$$\Rightarrow \quad Fall\,2: \quad -\left(X-7{,}5\right) \le 2{,}52 \quad \Rightarrow \quad -X+7{,}5 \le 2{,}52 \quad \Rightarrow \quad X \ge 4{,}98$$

$$\Rightarrow \quad B\left(X \le 10\right) - B\left(X \le 4\right) \quad \overset{Tabelle}{=} \quad 0{,}8801 - 0{,}1121 \quad = \quad 0{,}768 \quad \approx \quad 76{,}8\,[\%]$$

d) Begründen Sie kurz die Abweichung vom erwarteten Wert der σ-Regel.

Lösung:

Die Abweichung erklärt sich aufgrund der diskreten Merkmalsaufteilung der Binomialverteilung und der daraus resultierenden Aufrundung der Untergrenze auf die Zahl 5;

da bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit aber wegen der diskreten Merkmalausprägung erst ab dem Wert X ≤ 4 subtrahiert wird und in diesem Fall damit eine besonders große Differenz (0,98) besteht, kommt es zu dieser relativ großen Abweichung

Berechnungsbeispiel:

$$B\left(4{,}98 \le X \le 10{,}02\right) \quad \xrightarrow{Rundung} \quad B\left(5 \le X \le 10\right)$$

$$B\left(4{,}98 \le X \le 10{,}02\right) \quad \xrightarrow{aber\ Berechung} \quad B\left(X \le 10\right) - B\left(X \le 4\right)$$

$$\Rightarrow \quad B\left(X \le 10\right) - B\left(X \le 4\right) \quad \overset{Tabelle}{=} \quad 0{,}8801 - 0{,}1121 \quad = \quad 0{,}768 \quad \approx \quad 76{,}8\,[\%]$$

$$\Rightarrow \quad B\left(X \le 10\right) - B\left(X \le 5\right) \quad \overset{Tabelle}{=} \quad 0{,}8801 - 0{,}2194 \quad = \quad 0{,}6607 \quad \approx \quad 66{,}07\,[\%]$$

Zusatzfrage: Wer gilt als Erfinder der Glühbirne?

Lösung: Thomas Alva Edison (1847-1931)

Name:
Edison, Thomas Alva

Geburtsdatum:
11. Februar 1847

Geburtsort:
Milan/Ohio (USA)

Todestag:
18.10.1931 in West Orange

Sternzeichen:
Wassermann (20.01. - 18.02.)

4.) **Handy & Co.**

Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der Autolenker, die während der Fahrt mit dem Handy ohne Freisprechanlage telefonieren, 30 %. Diese Fahrer werden ab jetzt „*Handyschweinchen*" genannt.
Man darf annehmen, dass die Autofahrer unabhängig voneinander das Handy benutzen oder nicht.

a) Wie viele Autos muss man überprüfen, um mit mind. 99,9 %-iger Wahrscheinlichkeit mind. ein *Handyschweinchen* zu finden?

Lösung:

$$a)\quad B_{n;0,3}(X \geq 1) = 1 - B_{n;0,3}(X = 0) \geq 0{,}999$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n \leq 0{,}001 \xrightarrow{\ln} n \cdot \ln(0{,}7) \leq \ln(0{,}001)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}7)} = 19{,}367 \Rightarrow n \geq 20$$

b) Wie groß wäre der Anteil p der *Handyschweinchen* mind., wenn von 50 vorbeifahrenden Autos mit mind. 95 %-iger Wahrscheinlichkeit mind. eines von einem *Handyschweinchen* gelenkt würde.

<u>Lösung:</u>

$$B_{50\,;\,p}\left(X \geq 1\right) \quad = \quad 1 - B_{50\,;\,p}\left(X = 0\right) \quad \geq \quad 0{,}95$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \qquad \binom{50}{0} p^{0} \cdot \left(1-p\right)^{50} \quad \leq \quad 0{,}05$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen und } \sqrt[50]{(1\text{-p})}} \qquad \left(1-p\right) \quad \leq \quad \sqrt[50]{0{,}05}$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \qquad p \quad \geq \quad 1-\sqrt[50]{0{,}05} \quad = \quad 0{,}05816 \quad = \quad 5{,}8\left[\%\right]$$

5.) **Totale Wahrscheinlichkeit und Bayes**

In Mombelburg gibt es 4 Kioske. Am Kiosk K_1 kaufen 30 %, am Kiosk K_2 40 %, am Kiosk K_3 10 % und am Kiosk K_4 der Rest ihre Tageszeitungen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeitungen an den einzelnen Kiosken um die Mittagszeit bereits ausverkauft sein werden beträgt

0,8 – 0,6 – 0,9 – 0,7 (in der Reihenfolge der Kioske).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit an einem der Kioske um die Mittagszeit noch eine Tageszeitung zu erhalten?

<u>Lösung:</u>

$$P \quad = \quad 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}4 + 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}3 \quad = \quad 0{,}29$$

b) Rudi wollte eine Zeitung wollte eine Zeitung kaufen, leider hat er keine erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war er bei Kiosk K_3?

<u>Lösung:</u>

$$P \quad = \quad \frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}1\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}7}$$

$$P \quad = \quad \frac{0{,}09}{0{,}71} \quad = \quad 0{,}12676 \quad \approx \quad 12{,}676\left[\%\right]$$