Musterlösung **13. Jgst.** **3. Test** **Datum: 12.01.2007**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Themen: Normalverteilung; Hypothesentest (zweiseitig);

1.) **Normalverteilung bei Niederschlägen**

Die Zufallsvariable X gebe die Niederschlagsmenge von Ludwigshafen für den Monat März an. Langjährige Aufzeichnungen ergaben, dass die Niederschlagsmenge normalverteilt ist mit dem Mittelwert μ = 75 mm und σ = 5 mm.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im kommenden März

a) mindestens 80 mm Niederschlag fallen?

Lösung:

$$P(X \geq 80) = 1 - P(X < 80) = 1 - \Phi\left(\frac{80-75}{5}\right)$$

$$P(X \geq 80) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

b) höchstens 65 mm Niederschlag fallen?

Lösung:

$$P(X \leq 65) = 1 - \Phi\left(\frac{65-75}{5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

$$P(X \leq 65) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$

c) zwischen 53 mm und 85 mm Niederschlag fallen?

Lösung:

$$P(53 \leq X \leq 85) = P(X \leq 85) - P(X < 53) = \Phi\left(\frac{85-75}{5}\right) - \Phi\left(\frac{53-75}{5}\right)$$

$$P(53 \leq X \leq 85) = \Phi(2) - \Phi(-4{,}4) = 0{,}97725 - 0{,}00001 = 0{,}97724$$

d) Wie hoch sind die Niederschlagsmengen für den kommenden März, wenn die Wahrscheinlichkeit bei mind. 99 % **im Intervall** um den erwarteten Wert liegt?

Lösung:

$$\Phi(z)-\Phi(-z) \quad \geq \quad 0{,}99 \quad \xrightarrow{\Phi(-z)=1-\Phi(z)} \quad \Phi(z) \quad \geq \quad 0{,}995$$

$$\xrightarrow{Tabelle} \quad z = 2{,}58$$

$$z_1 \quad = \quad \frac{x_1-75}{5} \quad \xrightarrow{z=2{,}58} \quad 2{,}58 \quad = \quad \frac{x_1-75}{5}$$

$$\xrightarrow{Auflösen} \quad x_1 \quad = \quad 75+2{,}58\cdot 5 \quad = \quad 87{,}9$$

$$z_2 \quad = \quad \frac{x_2-75}{5} \quad \xrightarrow{z=-2{,}58} \quad -2{,}58 \quad = \quad \frac{x_2-75}{5}$$

$$\xrightarrow{Auflösen} \quad x_2 \quad = \quad 75-2{,}58\cdot 5 \quad = \quad 62{,}1$$

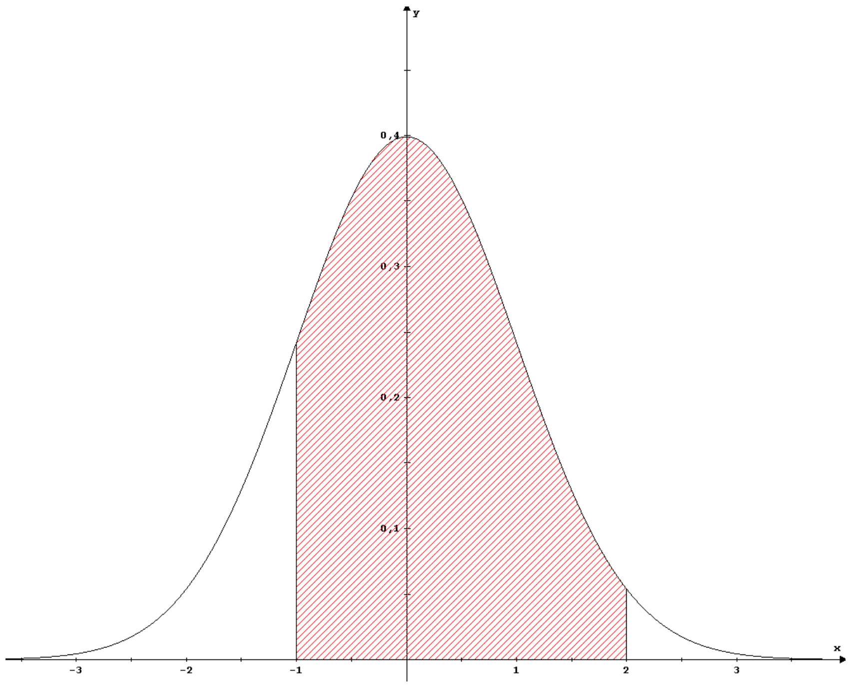
$$\Rightarrow \quad x\in[62{,}1\,;87{,}9]$$

d) Dokumentieren Sie Ihr den Ausdruck $\Phi(2)-\Phi(-1)$ graphisch anhand der Normalverteilungskurve.

Lösung:

$$\text{allgemein:} \quad \varphi_{\mu\,;\sigma}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathrm{N}(0\mid 1): \quad \varphi_{0\,;1}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



2.) **Hypothesentest bei Taschenrechnern**

Taschenrechner werden in größeren Serien hergestellt. Bei der Produktion rechnet man von Herstellerseite mit einer Fehlerquote von 10 %.

Das Unternehmen „Stiftung Rechnertest" vermutet, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit nicht korrekt ist.

Zusammen mit dem Hersteller prüft man 200 Rechner, die zufällig der Produktion entnommen werden.

a) In welchem Intervall müsste sich die Anzahl der defekten Rechner höchstens befinden, damit die Hypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 7 % nicht verworfen werden kann?

Lösung:

$$H_0: \quad p_0 = 0{,}1$$

$$n = 200 \quad \Rightarrow \quad \mu = 200 \cdot 0{,}1 = 20 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}9} = \sqrt{18}$$

$$2\Phi(z) - 1 \quad = \quad 0{,}93 \quad \xrightarrow{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)} \quad \Phi(z) \quad = \quad 0{,}965$$

$$\xrightarrow{Tabelle} \quad z = 1{,}81$$

$$linke\ Seite: \quad x_1 \quad = \quad 20 - 1{,}81 \cdot \sqrt{18} \quad = \quad 20 - 7{,}68 \quad = \quad 12{,}32$$

$$rechte\ Seite: \quad x_2 \quad = \quad 20 + 1{,}81 \cdot \sqrt{18} \quad = \quad 20 + 7{,}68 \quad = \quad 27{,}68$$

$$\Rightarrow \quad Annahme: \quad A \in [12{,}32\,;\,27{,}68] \quad \xrightarrow{ganzzahlig} \quad A \in \{13\,;...;\,27\}$$

b) Wie groß darf die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens sein, damit das Annahmeintervall B = {10; 11; ... ; 29; 30} für die Hypothese gilt?

Lösung:

$$\Rightarrow \quad Gegeben: \quad A \in \{10\,;...;\,30\}$$

$$linke\ Seite: \quad 10 \quad = \quad 20 - z \cdot \sqrt{18} \quad \Rightarrow \quad z \cdot \sqrt{18} \quad = \quad 10 \quad \Rightarrow \quad z \quad = \quad \frac{10}{\sqrt{18}} \quad \approx \quad 2{,}36$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(2{,}36) \quad = \quad 0{,}99086 \quad \xrightarrow{\substack{Symmetrisches \\ Intervall}} \quad 2 \cdot 0{,}99086 - 1 \quad = \quad 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0{,}01828$$

3.) **Flugplatzdisposition**

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass etwa 10 % aller Fluggäste, die einen Platz für einen bestimmten Flug reservieren lassen, nicht zum Abflug erscheinen.

Sie verkauft deshalb 450 Flugscheine für 360 verfügbare Plätze.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Fluggäste einen Platz bekommen?

Lösung:

$$n = 450 \quad und \quad p = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \mu = 450 \cdot 0{,}9 = 405 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{405 \cdot 0{,}1} \approx 6{,}364$$

$$P(X \leq 360) \quad = \quad \Phi\left(\frac{360 + 0{,}5 - 405}{6{,}364}\right) \quad = \quad \Phi(-7) \quad = \quad 0$$

Sollten dennoch mehr als 360 Personen zum Abflug erscheinen, steht ersatzweise noch kleines Charterflugzeug mit 50 Plätzen zur Verfügung.

Alle weiteren Fluggäste müssten dann auf andere Maschinen umgebucht werden, was die Fluggesellschaft 100,00 € pro Fluggast kostet.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Fluggesellschaft mehr als 500,00 € für entsprechende Umbuchungen zahlen?

Lösung:

$$n = 450 \quad und \quad p = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \mu = 450 \cdot 0{,}9 = 405 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{405 \cdot 0{,}1} \approx 6{,}364$$

$$P(X \geq 416) \quad = \quad 1 - P(X \leq 415) \quad = \quad 1 - \Phi\left(\frac{415 + 0{,}5 - 405}{6{,}364}\right) \quad = \quad 1 - \Phi(1{,}65)$$

$$P(X \geq 416) \quad = \quad 1 - 0{,}95053 \quad = \quad 0{,}04947$$