Musterlösung **11. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 16.01.2006**

Klasse: GY 05 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit

1.) Funktionsvorschriften gebr.-rat. Funktionen

Geben Sie je eine gebr.-rat. Funktion mit den folgenden Eigenschaften an:

a) Pol **mit** VZW an der Stelle $x = 2$ und eine Asymptote mit $a(x) = -1$.

b) Pol **ohne** VZW an der Stelle $x = -1$ und eine einfache Nullstelle bei $x = 4$.

c) Pol mit VZW an der Stelle $x = -2$, behebbare Lücke bei $x = 1$ und eine doppelte Nullstelle bei $x = 2$.

Lösung:

a) $f(x) = \frac{-x}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x-4}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{(x-2)^2 (x-1)^n}{(x+2)(x-1)} \quad mit\ n \geq 1$

2.) Aussagenprüfung

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. Sollte die Aussage falsch sein, **begründen** Sie jeweils Ihre Meinung, dann zeigen Sie dies **zusätzlich mittels eines Gegenbeispiels**.

a) Wenn der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist, dann hat der Graph keine Asymptote parallel zur x-Achse.

Lösung: *falsch,*

wenn der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist, dann hat der Graph die x-Achse als Asymptote.

b) Wenn der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners ist, dann hat der Graph keine Asymptote parallel zur x-Achse.

Lösung: *richtig*

c) Wenn im Zähler und im Nenner die Nullstelle(n) den gleichen Wert haben, dann ist an dieser Stelle **immer** eine behebbare Lücke .

<u>Lösung:</u> ***falsch,***

wenn im Nenner die betreffende Nullstelle häufiger vorkommt als im Zähler, dann liegt eine Polstelle vor.

d) Eine gebrochen-rationale Funktion hat immer mindestens eine Polstelle.

<u>Lösung:</u> ***falsch,***

es könnte auch lediglich eine Lücke sein oder sollte der Nenner $\forall x \in \Re$ *definiert sein, dann hat man weder Polstelle noch Lücke.*

Beispiele: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + c} \quad mit\ c > 0$;

$$f(x) = \frac{(x-1)^{2+c}}{(x-1)^2} \xrightarrow{\text{wenn } c > 0} \text{Lücke bei } x = 1$$

3.) Bestimmen der Funktionsvorschrift einer gebr.-rat. Funktion

a) Bestimmen Sie a und b $\in \Re$ so, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{a}{x^2 - b}$ den Punkt P (1 / 1) hat und die Polstellen $|x| = 2$ hat.

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = \frac{a}{x^2 - b} \xrightarrow{Polstellen} f(x) = \frac{a}{x^2 - 4}$$

$$\xrightarrow{P(1\mid 1)\ eingesetzt} 1 = \frac{a}{1-4} \quad \Rightarrow \quad a = (-3)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{-3}{x^2 - 4}$$

b) Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 + bx}{x - a} \quad \text{mit a, b} \in \Re$$

die Asymptote y = x + 1 und die Polstelle x = 4 besitzt?

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = \frac{x^2 + bx}{x - a} \xrightarrow{\text{Polstelle}} f(x) = \frac{x^2 + bx}{x - 4}$$

$$\xrightarrow{\text{Polynomdivision}} b + 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = (-3)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$$

c) Bestimmen Sie a, b $\in \Re$ so, dass die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x - a}{x^2 + b}$$

die Nullstelle x = 3 und eine Polstelle bei x = 2 hat.

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = \frac{x - a}{x^2 + b} \xrightarrow{\text{Nullstelle}} f(x) = \frac{x - 3}{x^2 + b}$$

$$\xrightarrow{\text{Polstelle}} f(x) = \frac{x - 3}{x^2 + (-4)} = \frac{x - 3}{x^2 - 4}$$

4.) **Kurvenuntersuchung**

a) $f(x) = \dfrac{-x^4 + 1}{x^2 - 4}$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich Polstellen, Lücken, Nullstellen und Asymptoten.

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = \frac{-x^4 + 1}{x^2 - 4}$$

$$Zählernullstellen: \quad -x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = -1$$

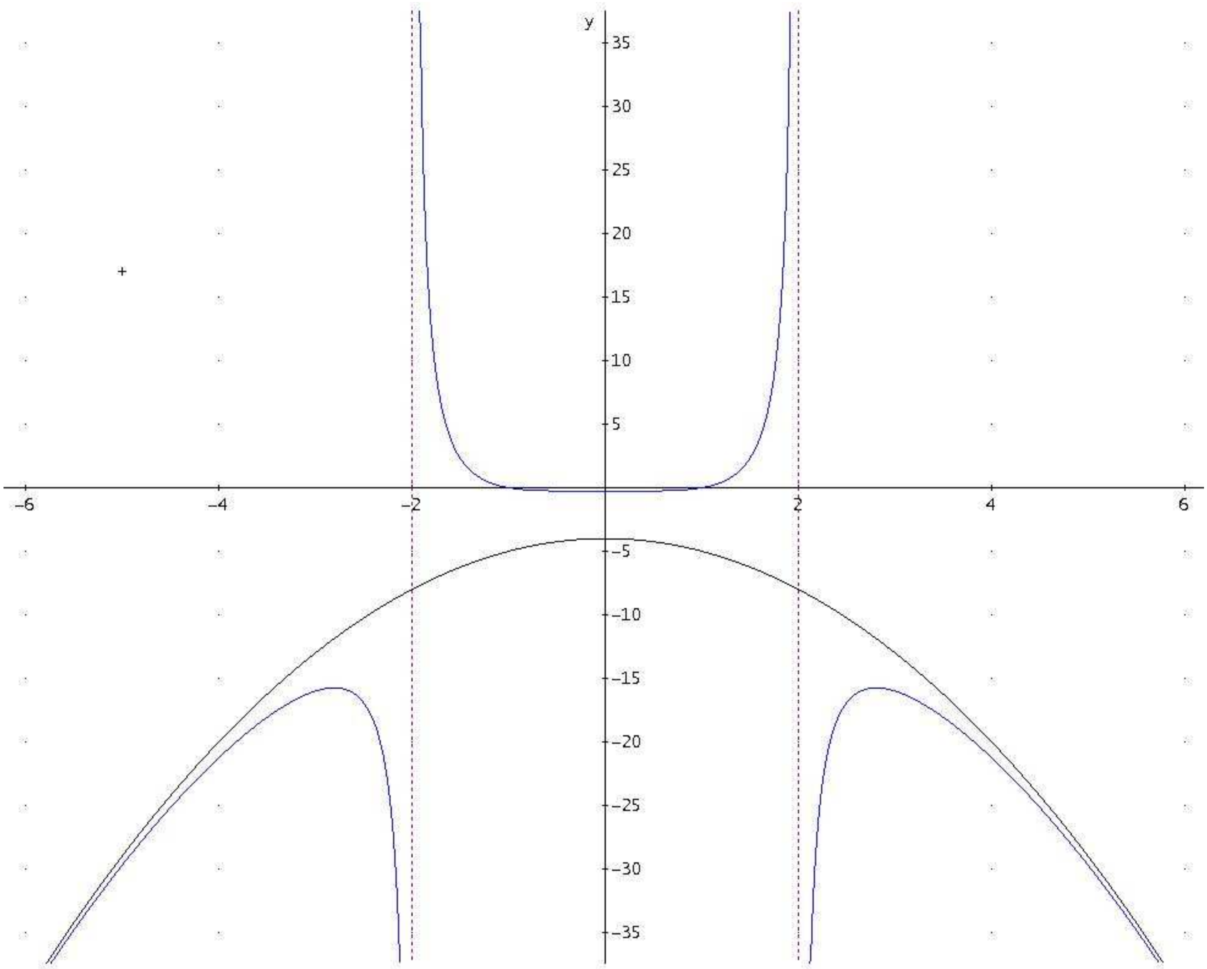
$$Nennernullstellen: \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = -2$$

$$Nullstellen\ der\ Funktion: \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = -1$$

$$Polstellen\ der\ Funktion: \quad x_1 = 2\,[\text{m. VZW}] \quad \wedge \quad x_2 = -2\,[\text{m. VZW}]$$

$$keine\ Lücken$$

$$Asymptote: \quad a(x) = -x^2 - 4 \quad (\text{mittels Polynomdivision})$$



b) $g(x) = \dfrac{2x^3+4x^2+2x}{x^3+x^2} = \dfrac{2x(x+1)^2}{x^2(x+1)}$

(i) Wie gelangt man auf den zweiten Ausdruck für g(x)

(ii) Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich Polstellen, Lücken, Nullstellen und Asymptoten.

Lösung:

$$g(x) = \frac{2x^3+4x^2+2x}{x^3+x^2} \xrightarrow{\textit{Ausklammern und Linearfaktorzerlegung}} \frac{2x(x+1)^2}{x^2(x+1)}$$

$$\textit{Zählernullstellen}: \quad 2x(x+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=-1\,(\textit{doppelt})$$

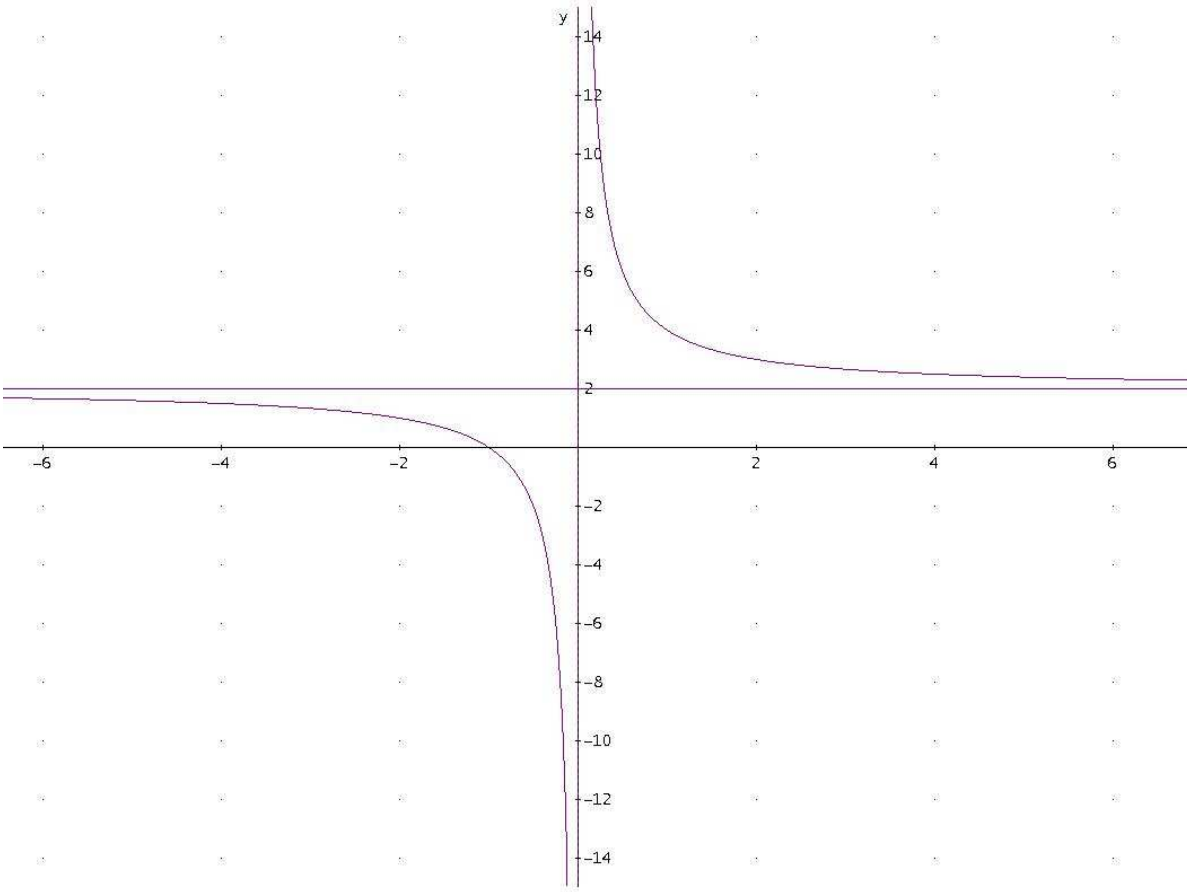
$$\textit{Nennernullstellen}: \quad x^2(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0\,(\textit{doppelt}) \quad \wedge \quad x_2=-1$$

$$\textit{Lücke der Funktion}: \quad x_1=-1$$

$$\textit{Polstelle der Funktion}: \quad x_1=0\,[\text{m. VZW}]$$

$$\textit{keine Nullstellen}$$

$$\textit{Asymptote}: \quad a(x)=2 \quad (\text{Zählergrad = Nennergrad } \Rightarrow \text{ ablesen})$$



c) $k(x)=\dfrac{x^2+x-6}{4x+2}$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich Polstellen, Lücken, Nullstellen und Asymptoten.

<u>Lösung:</u>

$$k(x)=\frac{x^2+x-6}{4x+2}$$

$$\textit{Zählernullstellen}: \quad x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=-3$$

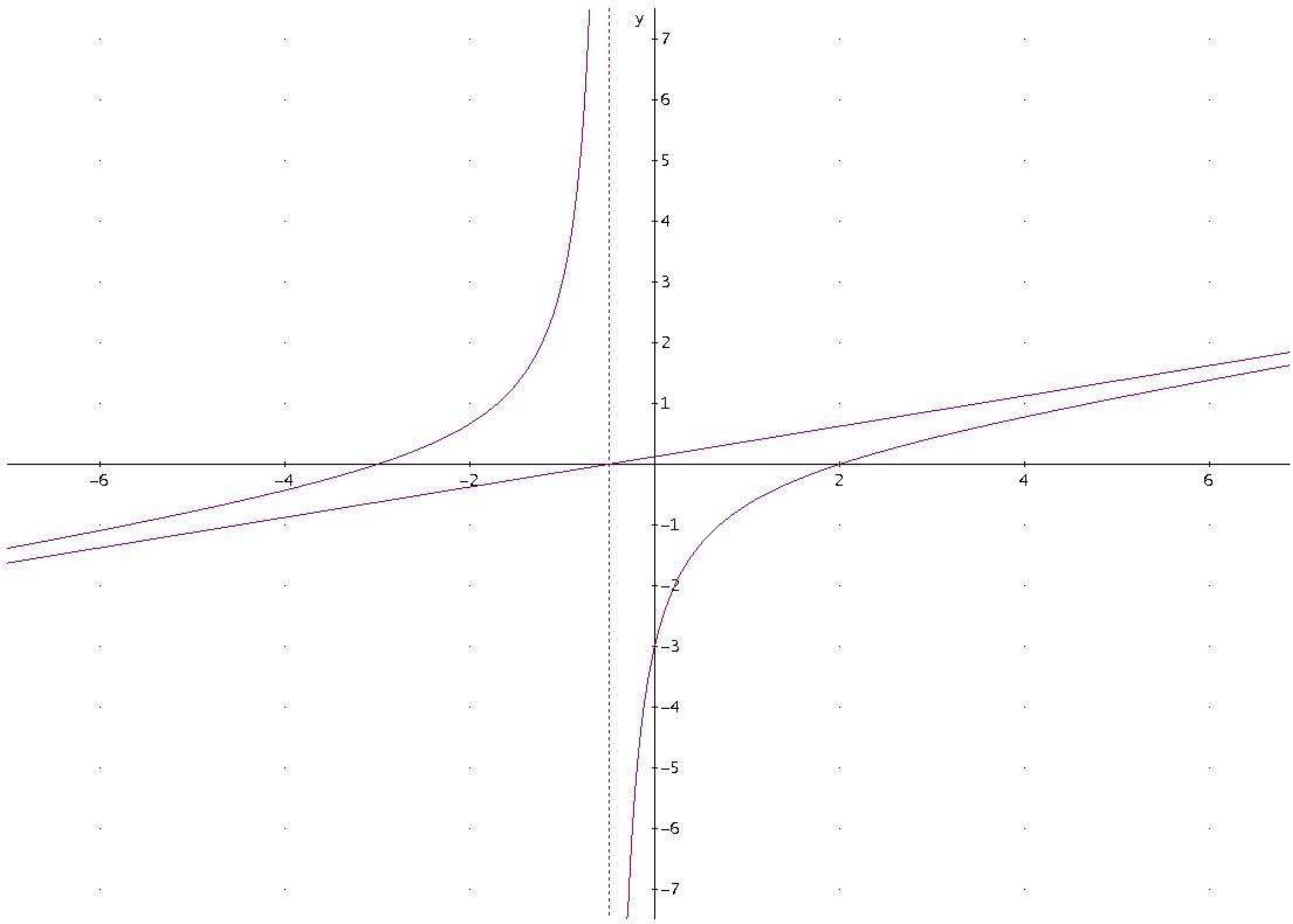
$$\textit{Nennernullstelle}: \quad 4x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$$

$$\textit{Nullstellen der Funktion}: \quad x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=-3$$

$$\textit{Polstelle der Funktion}: \quad x=-\frac{1}{2}\,[\text{m. VZW}]$$

keine Lücken

$$\textit{Asymptote}: \quad a(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8} \quad (\text{mittels Polynomdivision})$$



5.) Abschnittweise definierte Funktionen

Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf Stetigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-x & x<2 \\ \frac{1}{2}x+3 & x\geq 2 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} -x^2+x+10 & x<3 \\ 4 & x=3 \\ x+1 & x>3 \end{cases}$

Lösung:

$$f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+3=4 \quad und$$

a)

$$\lim_{h\to 0} f(2-h)=\lim_{h\to 0}\left[2(2-h)^2-(2-h)\right] \overset{\substack{Grenzwert\\übergang}}{=} 8-2=6$$

Ergebnis: $f(x)$ ist nicht stetig, weil $\lim_{h\to 0} f(x_0-h)\neq f(x_0)$

$$g(3)=4 \quad und$$

b)

$$\lim_{h\to 0} g(3-h)=\lim_{h\to 0}\left[-(3-h)^2+(3-h)+10\right] \overset{\substack{Grenzwert\\übergang}}{=} -9+3+10=4$$

$$\lim_{h\to 0} g(3+h)=\lim_{h\to 0}\left[(3+h)+1\right] \overset{\substack{Grenzwert\\übergang}}{=} 3+1=4$$

Ergebnis: $f(x)$ ist stetig.

6.) Begriffsdefinition

Definieren Sie den Begriff „Stetigkeit“ in mathematischer Form.

Lösung: *Stetigkeit in* $x_0\in[a\,;b]$ *liegt vor, wenn gilt:*

(i) $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h)=f(x_0)$ *und*

(ii) $f(x_0)\ existiert$

7.) Abschnittweise definierte Funktionen mit/ohne Parameter

Gegeben sei die Funktion g(x): $g_t(x) = \begin{cases} x^3 - 3tx & x \le -1 \\ 3x^2 + x & x > -1 \end{cases}$

a) Vervollständigen Sie folgende Wertetabelle, wenn gilt: **t = 1**

x	- 2		3
g(x)		14	

Lösung:

x	- 2	*2*	3
g(x)	*- 2*	14	*30*

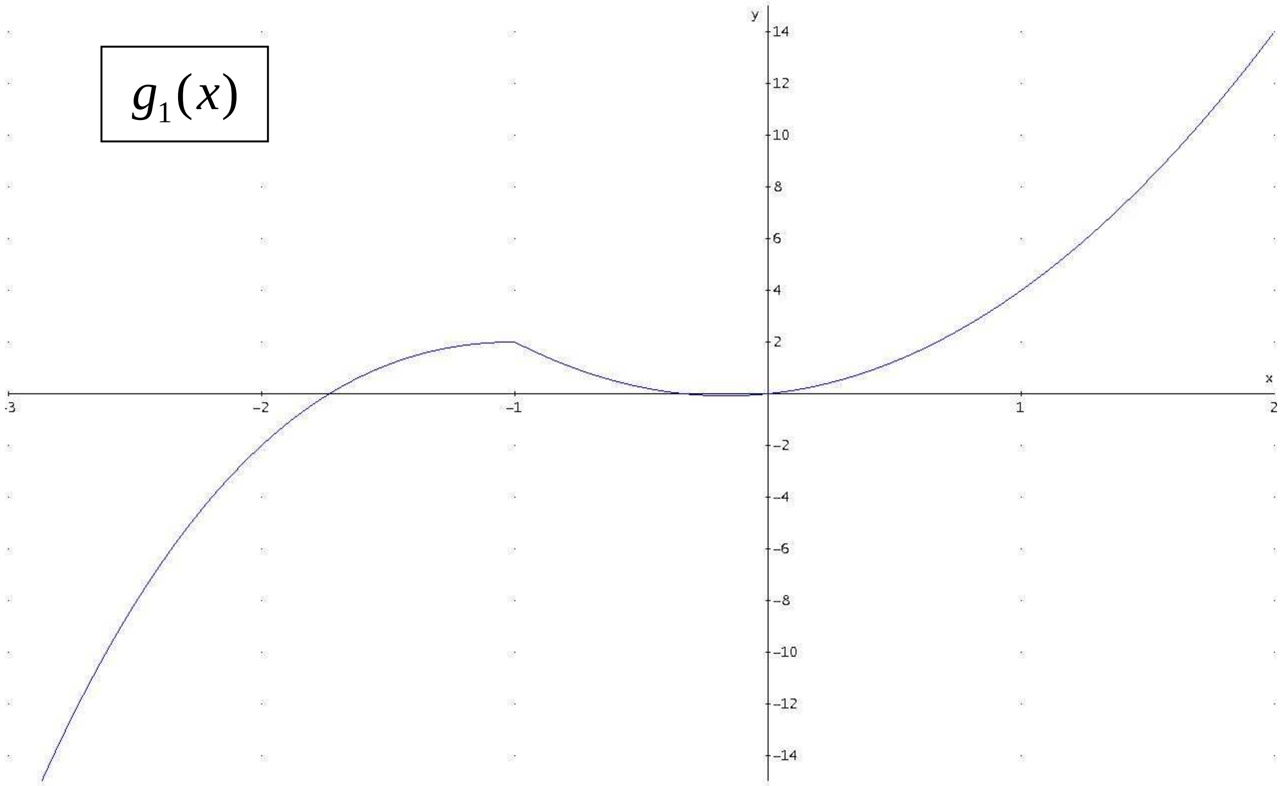
Lösungsansatz für $g_1(x) = 14$

Der obere Funktionsteil erbringt keine Lösung, daher ...

$$3x^2 + x = 14 \xrightarrow{quadr.Gleichung} 3x^2 + x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{7}{3}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2$ ist gesuchte Lösung, da x_2 nicht im Definitionsbereich



b) Für welchen Wert von **t** ist die Funktion $g_t(x)$ stetig?

Lösung:

$$g_t(-1)=(-1)^3-3t\cdot(-1)=3t-1$$

$$\lim_{h\to 0} g(-1+h)=\lim_{h\to 0}\left[3(-1+h)^2+(-1+h)\right]\overset{\substack{\text{Grenzwert}\\ \text{übergang}}}{=}3-1=2$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen}}\quad 3t-1=2\quad\Rightarrow\quad t=1$$

Ergebnis: $g(x)$ ist für t=1 stetig.

8.) Lösung von Gleichungen

Lösen Sie folgende Gleichung:

$$x^4-4x^2+5=2$$

Lösung:

$$x^4-4x^2+5=2\quad\xrightarrow{\text{Substitution}: x^2=z\quad und\quad |-2}\quad z^2-4z+3=0$$

$$\Rightarrow\quad z_1=1\quad\wedge\quad z_2=3$$

$$\xrightarrow{\text{Re}\,substitution: z=x^2}\quad x_1=1\quad\wedge\quad x_2=-1\quad und$$

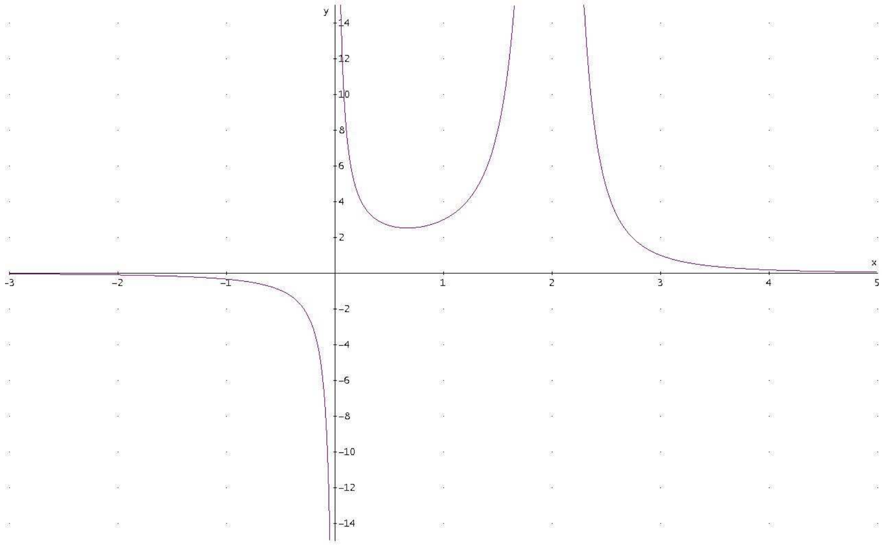
$$\xrightarrow{\text{Re}\,substitution: z=x^2}\quad x_3=\sqrt{3}\quad\wedge\quad x_4=-\sqrt{3}$$

10.) Zuordnung von Funktionstermen

Ordnen Sie die drei Schaubilder den Funktionsvorschriften unter Aufgabe 4 zu und fügen Sie die Asymptoten und Polstellen-Geraden hinzu.

Lösung: ***vgl. Lösung zu Aufgabe 4***

9.)   Graphische Analyse



Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{3}{x(x-2)^2}$ mit $x \in \Re \setminus \{0;\ 2\}$

Benutzen Sie diese Abbildung und skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$g(x) = \frac{3}{x(x-2)} \quad \text{mit} \quad x \in \Re \setminus \{0;\ 2\}\ .$$

Gutgemeinte Anmerkung seitens Ihres Mathematiklehrers:
Ermitteln Sie zuvor die Funktionswerte für x = -1; x = 1 und x = 3.

Lösung: