Musterlösung **11. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 28.09.2006**

Klasse: GY 06 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Funktionen, Lineare Funktionen, erweitertes Distributivgesetz, Intervalle und Mengen**

1.) Erweitertes Distributivgesetz

Multiplizieren Sie die Klammerterme aus:

(i) $\left(b^2+2\right)\cdot\left(b-3\right)$

Lösung: $\left(b^2+2\right)\cdot\left(b-3\right) \quad = \quad b^3-3b^2+2b-6$

(ii) $\left(-c+\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(4c^4-\frac{1}{3}x^2\right)$

Lösung: $\left(-c+\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(4c^4-\frac{1}{3}x^2\right) \quad = \quad -4c^5+\frac{1}{3}cx^2+2c^4x-\frac{1}{6}x^3$

(iii) $\left(3y^2+4\right)^3$

Lösung: $\left(3y^2+4\right)^3 \quad = \quad 27y^6+108y^4+144y^2+64$

(iv) $\left(\frac{1}{5}x-2\right)^5$

Lösung: $\left(\frac{1}{5}x-2\right)^5 \quad = \quad \frac{1}{3.125}x^5-\frac{2}{125}x^4+\frac{8}{25}x^3-\frac{16}{5}x^2+16x-32$

2.) Mengen und Intervalle

Stellen Sie folgende Mengen in der Intervallschreibweise dar:

A = {x ∈ $\Re$ | x ≤ 4} ______________________

B = {x ∈ $\Re$ | - 1 < x ≤ 10} ______________________

C = {x ∈ $\Re$ | 6 ≤ x < 9} ______________________

D = {x ∈ $\Re$ | x^2 ≤ 64} ______________________

E = {x ∈ $\Re$ | x^2 ≥ 16} ______________________

Lösung:

A = $\{x \in \Re \mid x \leq 4\}$ ⇨ $A =]-\infty; 4]$

B = $\{x \in \Re \mid -1 < x \leq 10\}$ ⇨ $B =]-1; 10]$

C = $\{x \in \Re \mid 6 \leq x < 9\}$ ⇨ $C = [6; 9[$

D = $\{x \in \Re \mid x^2 \leq 64\}$ ⇨ $D = [-8; 8]$

E = $\{x \in \Re \mid x^2 \geq 16\}$ ⇨ $E =]-\infty; -4] \cup [4; \infty[$

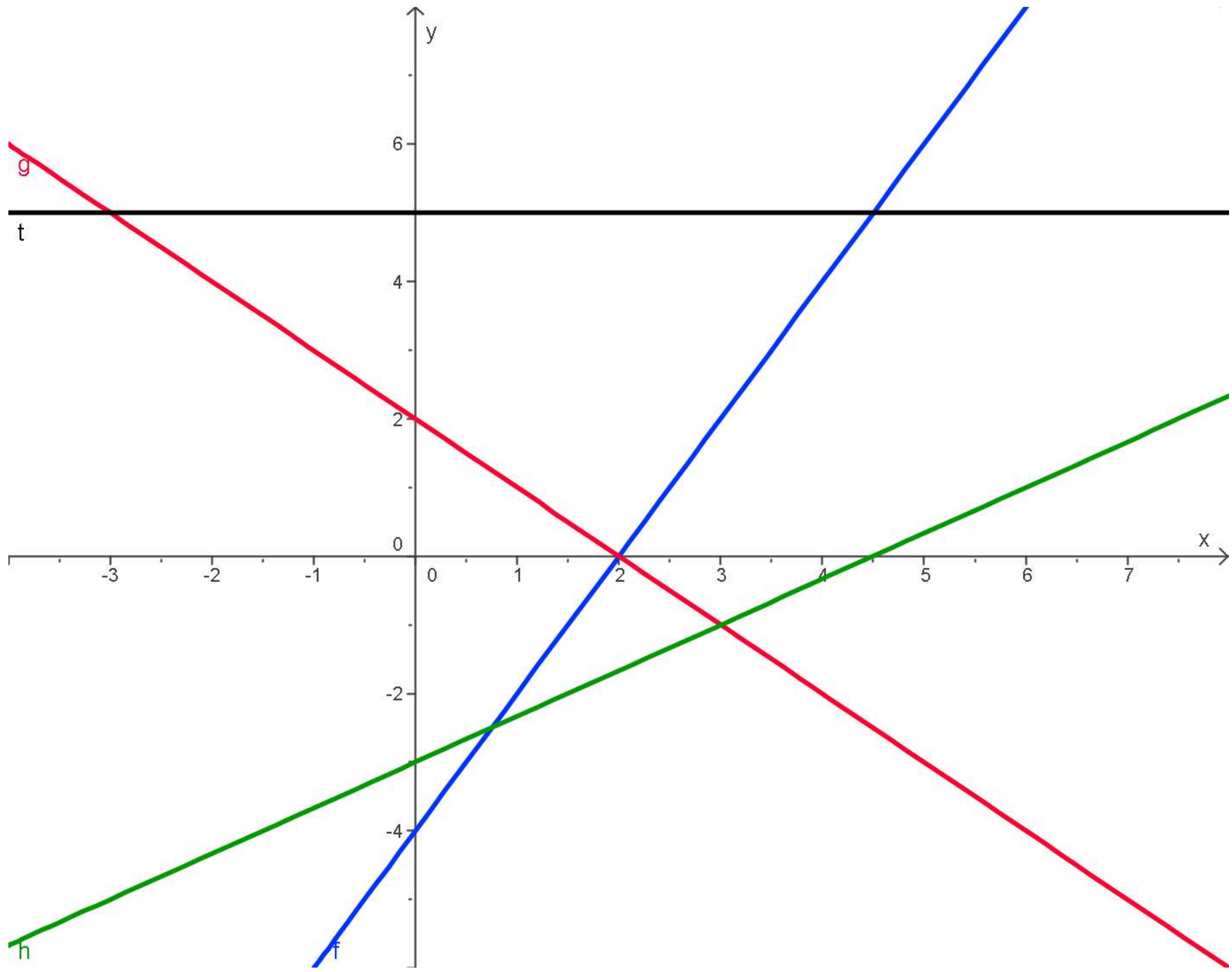
3.) Zeichnen linearer Funktionen

Zeichnen Sie die folgenden linearen Funktionen in **ein** Koordinatensystem:

a) $f(x) = 2x - 4$ b) $g(x) = -x + 2$

c) $h(x) = \frac{2}{3}x - 3$ d) $t(x) = 5$

Lösung:



4.) Bestimmen linearer Funktionsvorschriften

Bestimmen Sieden Funktionsterm der linearen Funktionen aus den Vorgaben:

a) f(x) hat die Steigung –3 und geht durch den Punkt P (2 / - 4).

Lösung: $-4=(-3)\cdot 2+b \quad \Rightarrow \quad b=2 \quad \Rightarrow \quad f(x)=(-3)x+2$

b) g(x) geht durch die Punkte A (- 2 / 25) und B (6 / 13).

Lösung:

$$m=\frac{13-25}{6-(-2)}=-\frac{3}{2} \xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{Punkt}} 13=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 6+b \quad \Rightarrow \quad b=22$$

$$\Rightarrow \quad g(x)=\left(-\frac{3}{2}\right)x+22$$

c) h(x) verläuft parallel zur Geraden 2x + 5y = 1 durch den Punkt Q (1 / 1).

Lösung:

$$2x+5y=1 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad m=\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$\textit{Punkt einsetzen}: \quad 1=\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1+b \quad \Rightarrow \quad b=\frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad h(x)=\left(-\frac{2}{5}\right)x+\frac{7}{5}$$

d) t(x) verläuft mit dem Abstand 4 parallel zur x-Achse.

Lösung: $t_1(x)=4 \qquad t_2(x)=-4$

e) w(x) hat die Steigung (– 3) und geht durch den Ursprung.

Lösung: $w(x)=-3x$

f) k(x) verläuft senkrecht zur Geraden $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ durch Q (3 / - 1).

Lösung:

$$m_1\cdot m_2=(-1) \xrightarrow{m_1=-\frac{1}{2}} m_2=2$$

$$\xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{Punkt}} -1=2\cdot 3+b \quad \Rightarrow \quad b=-7 \quad \Rightarrow \quad k(x)=2x-7$$

5.) Schnittpunkte

Ermitteln Sie die Schnittpunkte, welche die Funktionen $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -x + 2$ und $h(x) = \frac{2}{3}x - 3$ miteinander besitzen.

Lösung:

$$1.)\quad f(x) = g(x) \quad\Rightarrow\quad 2x - 4 = -x + 2 \quad\Rightarrow\quad x = 2$$
$$\Rightarrow\quad y = 0 \quad\Rightarrow\quad S(2 \mid 0)$$

$$2.)\quad f(x) = h(x) \quad\Rightarrow\quad 2x - 4 = \frac{2}{3}x - 3 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow\quad y = -\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad S\left(\frac{3}{4} \,\middle|\, -\frac{5}{2}\right)$$

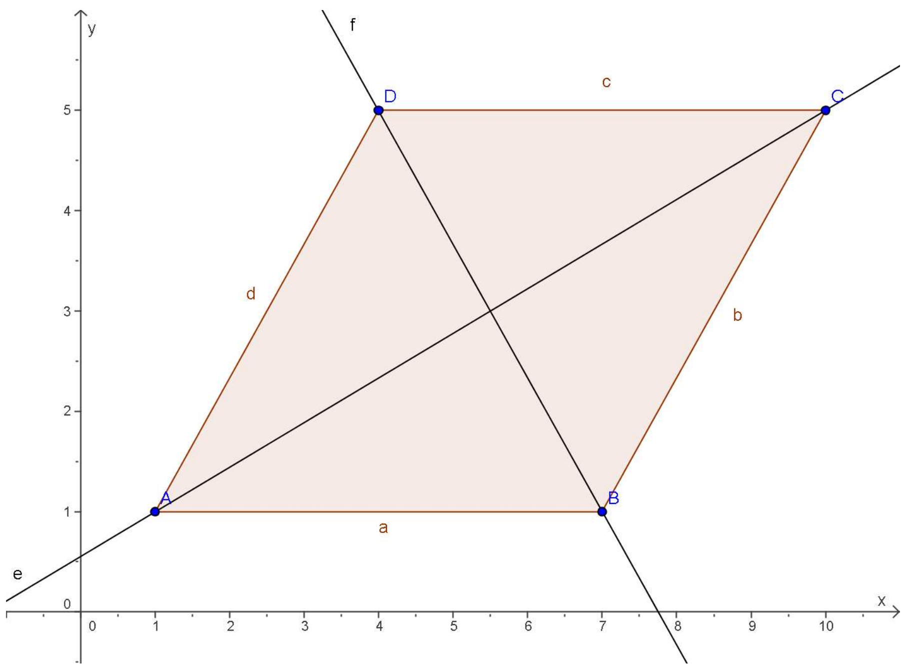
$$3.)\quad g(x) = h(x) \quad\Rightarrow\quad -x + 2 = \frac{2}{3}x - 3 \quad\Rightarrow\quad x = 3$$
$$\Rightarrow\quad y = -1 \quad\Rightarrow\quad S(3 \mid -1)$$

6.) Geometrische Anwendung

Gegeben ist das Parallelogramm mit den Eckpunkten A (1 / 1), B (7 / 1), C (10 / 5) und D (4 / 5).

a) Zeichnen Sie das Parallelogramm einschließlich seiner Diagonalen in ein Koordinatensystem.

Lösung:



b) Berechnen Sie Funktionsvorschriften der beiden Diagonalen?

<u>Lösung:</u>

$$Diagonale\ \overline{AC}:$$

$$m=\frac{5-1}{10-1}=\frac{4}{9}\quad\xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{Punkt}}\quad 1=\frac{4}{9}\cdot 1+b\quad\Rightarrow\quad b=\frac{5}{9}\quad\Rightarrow\quad d_{\overline{AC}}(x)=\frac{4}{9}x+\frac{5}{9}$$

$$Diagonale\ \overline{BD}:$$

$$m=\frac{5-1}{4-7}=-\frac{4}{3}\quad\xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{Punkt}}\quad 5=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 4+b\quad\Rightarrow\quad b=\frac{31}{3}$$

$$\Rightarrow\quad d_{\overline{BD}}(x)=\left(-\frac{4}{3}\right)x+\frac{31}{3}$$

c) Ermitteln Sie den Umfang des Parallelogramms.
Anmerkung: *Verwenden Sie hierzu den Satz des Pythagoras.*

<u>Lösung:</u>

$$Umfang:$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} \left|\overline{AB}\right| & = & \left|\overline{DC}\right| & = & 6 & & \\ \left|\overline{AD}\right| & = & \left|\overline{BC}\right| & = & \sqrt{16+9} & = & 5 \end{array}\right\}\quad U=2\cdot(6+5)=22$$

7.) Punktproben

Eine Gerade sei durch die Funktionsvorschrift $f(x) = 0{,}3x+1$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinatenwerte der Punkte, die auf der Gerade liegen:

(i) A (2 / ??) (ii) B (?? / 2,5)

Lösung:

$$Punkt\ A: \quad f(2) = 0{,}3 \cdot 2 + 1 = 1{,}6 \Rightarrow A(2 \mid 1{,}6)$$

$$Punkt\ B: \quad \frac{5}{2} = \frac{3}{10}x + 1 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow B\left(5 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right)$$

b) Prüfen Sie, ob C (- 1 / 0,7) bzw. D (- 1,4 / 0,6) auf der Geraden liegen.

Lösung:

$$Punkt\ C: \quad f(-1) = 0{,}3 \cdot (-1) + 1 = 0{,}7 \Rightarrow C \in f(x)$$

$$Punkt\ D: \quad f(-1{,}4) = 0{,}3 \cdot (-1{,}4) + 1 = 0{,}58 \Rightarrow D \notin f(x)$$

c) Geben Sie zwei weitere Punkte an, die auf der Geraden liegen.

Lösung:

$$Beispiel: \quad Punkt\ E: \quad E(0 \mid 1) \qquad Punkt\ F: \quad F(1 \mid 1{,}3)$$

mehr oder minder freie Antwortmöglichkeit

8.) Ökonomische Anwendung: Handy-Tarife

Sie haben die Auswahl zwischen drei Handytarifen:

Tarif 1: Grundgebühr: 20 €/$_{\text{Monat}}$ Einheit: 0,02 €/$_{\text{Minute}}$
Tarif 2: Grundgebühr: 10 €/$_{\text{Monat}}$ Einheit: 0,1 €/$_{\text{Minute}}$
Tarif 3: Flatrate: 25 €/$_{\text{Monat}}$

a) Stellen Sie Tarife als lineare Funktionsvorschriften dar (Grundgebühr = y-Achsenabschnitt; Einheiten als Steigungswert

Lösung: $t_1(x) = \frac{2}{100}x + 20 \qquad t_2(x) = \frac{1}{10}x + 10 \qquad t_3(x) = 25$

b) Wie hoch wären die Kosten bei den jeweiligen Tarifen, wenn Sie pro Monat

(i) eine Stunde telefonieren würden?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
t_1(60) &= \frac{2}{100}\cdot 60 + 20 &= 21{,}20 \\
t_2(60) &= \frac{1}{10}\cdot 60 + 10 &= 16{,}00 \\
t_3(60) &= 25
\end{aligned}
$$

(ii) 12 Stunden telefonieren würden?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
t_1(720) &= \frac{2}{100}\cdot 720 + 20 &= 34{,}40 \\
t_2(720) &= \frac{1}{10}\cdot 720 + 10 &= 82{,}00 \\
t_3(720) &= 25
\end{aligned}
$$

c) Bei welcher Minutenanzahl wären die Gesamtkosten der Tarife 1 und 3 identisch?

Lösung:

$$t_1(x) = t_3(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{100}x + 20 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 250\,[Minuten]$$

d) Für welchen Tarif würden Sie sich entscheiden?
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung: *Freie Antwortmöglichkeit*

9.) Parallel oder senkrecht?

Untersuchen Sie die Lagebeziehungen der 7 Geraden zueinander und füllen Sie nur diese Kästchen der Tabelle aus, bei denen eine parallele oder senkrechte Beziehung zwischen den Geraden vorliegt (**P** für parallel oder **O** für senkrecht).

$$f_1(x) = 8x-1 \qquad f_2(x) = \frac{x}{3}+7 \qquad f_3(x) = -3x+1$$

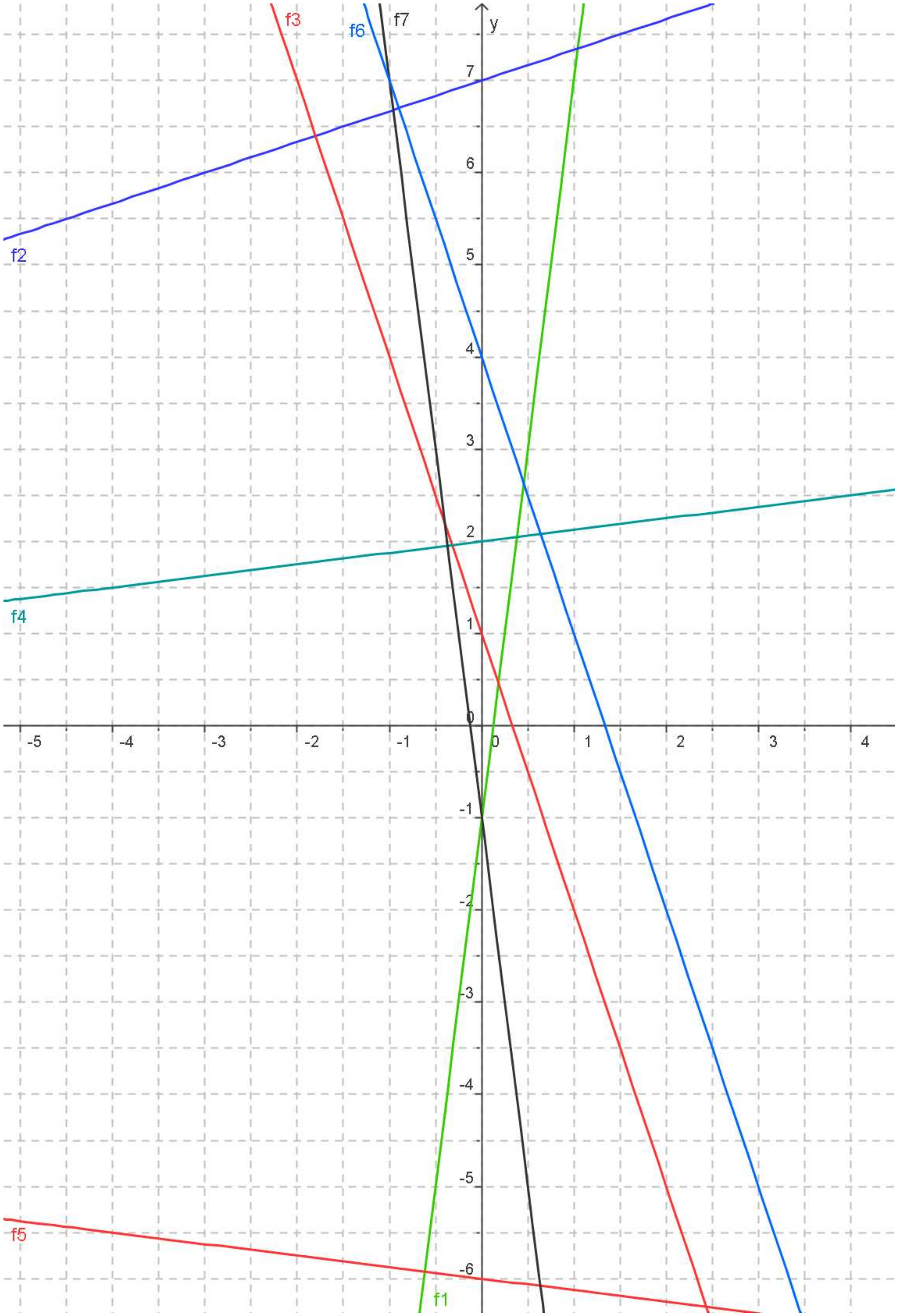
$$f_4(x) = 0{,}125x+2 \qquad f_5(x) = -0{,}125\,x-6$$

$$f_6(x) = \frac{-9x+12}{3} \qquad f_7(x) = -8x-1$$

Lösung:

	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$
$f_1(x)$	S	S	S	O	S	S
$f_2(x)$	xxxxxxx	O	S	S	O	S
$f_3(x)$	xxxxxxx	xxxxxxx	S	S	P	S
$f_4(x)$	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx	S	S	O
$f_5(x)$	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx	S	S
$f_6(x)$	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx	S

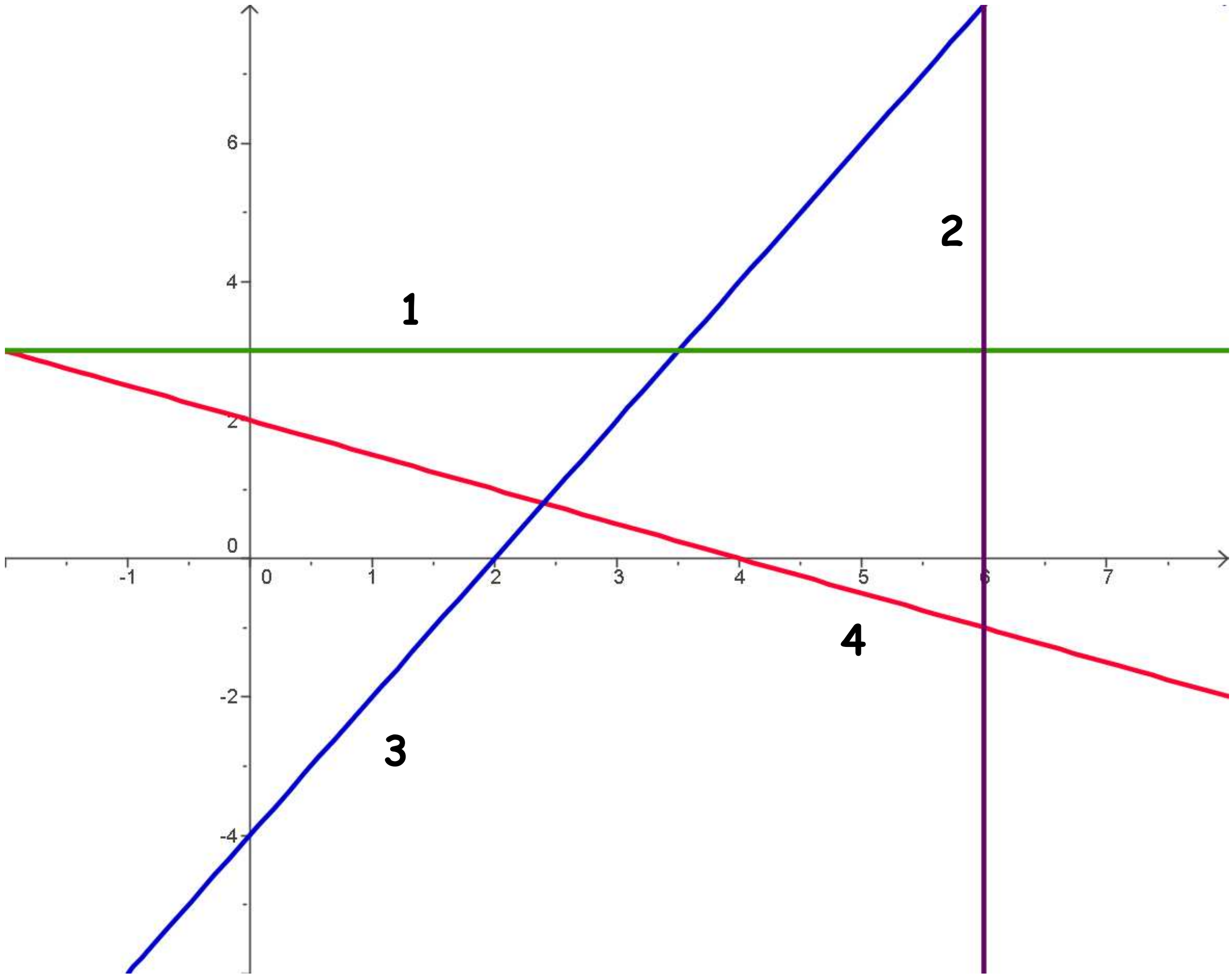
Zur Veranschaulichung siehe auch die nachfolgende graphische Darstellung:



f3
f7
f6
y
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
f2
f4
f5
f1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

10.) Bestimmen von Geradengleichungen

Bestimmen Sie die Geradengleichungen der vier gegebenen Graphen:



<u>Lösung:</u>

1.) $f(x) = 3$ 2.) $x = 6$

3.) $f(x) = 2x-4$ 4.) $f(x) = -\frac{1}{2}x+2$