Musterlösung 11. Jgst. 2. Kursarbeit Datum: 18.01.2007

Klasse: GY 06 a Fach: Mathematik (Kernfach)

Thema: Ganz- & Gebr.-rat. Funktionen; Grenzwerte und Stetigkeit

---

❶ **Symmetrie**

Definieren Sie den Begriff „Punktsymmetrie" mathematisch und veranschaulichen Sie dies graphisch.

Lösung:

Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn sie folgender Bedingung genügt: $f(-x) \;=\; -f(x)$

Graphisch bedeutet dies eine Punktspiegelung am Ursprung des Koordinatensystems.

❷ **Kurvenuntersuchung bei ganzrationalen Funktionen**

Untersuchen Sie die zwei Funktionen nach folgenden Kriterien:

(i) Symmetrie
(ii) Nullstelle(n)
(iii) Schnittstelle mit y-Achse
(iv) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$
(v) Zeichnung der Funktion

a) $f(x) \;=\; 3x^2 - 4x$	b) $g(x) \;=\; \frac{1}{4}x^3 + 2$

Lösung:

a) $f(x) \;=\; 3x^2 - 4x$

$$f(-x) \;=\; 3(-x)^2 - 4(-x) \;=\; 3x^2 + 4x \;\neq\; -f(x) \;\; und \;\; \neq \;\; f(x)$$

$$\Rightarrow \;\; keine\ Symmetrie$$

Nullstellen: $3x^2 - 4x \;=\; 0 \;\Rightarrow\; x(3x-4) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = \frac{4}{3}$

Schnittstelle mit y-Achse: $f(0) \;=\; 3\cdot 0^2 - 4\cdot 0 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; S_y(0 \mid 0)$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x^2 - 4x\right) \;\to\; \infty$

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$

$$g(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 + 2 = -\frac{1}{4}x^3 + 2 \neq -g(x) \quad und \quad \neq g(x)$$

$\Rightarrow$ *keine Symmetrie*

Nullstellen: $\frac{1}{4}x^3 + 2 = 0 \xrightarrow[\cdot 4]{-2} x^3 = (-8) \Rightarrow x = -2$

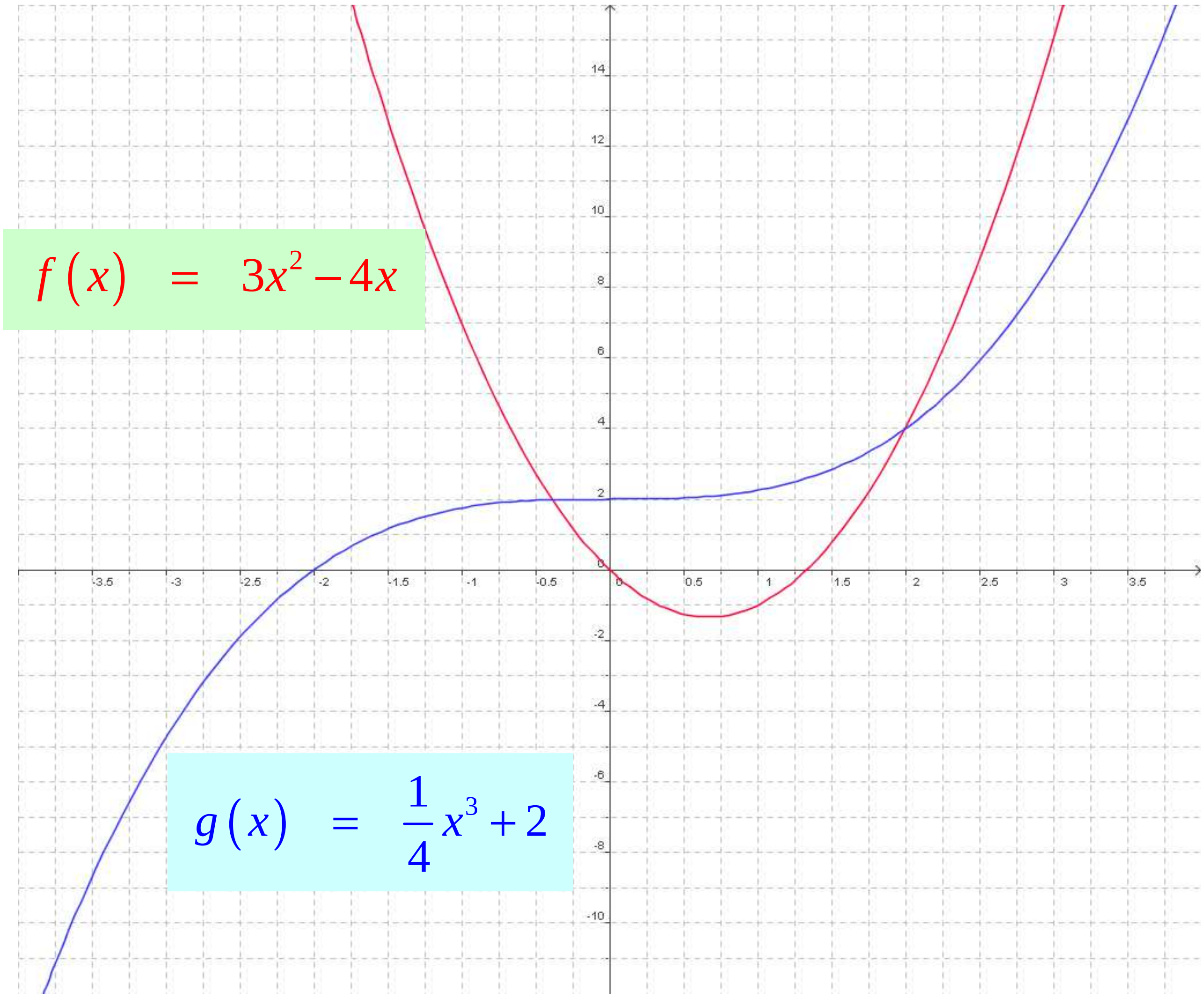
Schnittstelle mit y-Achse: $g(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^3 + 2 = 2 \Rightarrow S_y(0 \mid 2)$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}x^3 + 2\right) \to \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^3 + 2\right) \to -\infty$$

Zeichnung der beiden Graphen:



❸ Nullstellenanzahl in Abhängigkeit des Parameters

Gegeben sei die Parameterfunktion $f_t(x) = x^3 - tx^2 + 2tx$.

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit der Werte des Parameters an.

Lösung:

$$f_t(x) = x^3 - tx^2 + 2tx = 0 \xrightarrow{\text{Ausklammern}} x\left(x^2 - tx + 2t\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$ ist eine parameterunabhängige Lösung.

$$x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{t^2 - 8t}}{2} \xrightarrow{\text{Diskriminante = 0}} t^2 - 8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t(t-8) = 0$$

$\Rightarrow$ Für $t = 8$ gibt es eine weitere Lösung.

$t^2 - 8t > 0 \quad \Rightarrow \quad [t_1 < 0 \quad \vee] \quad t > 8 \quad \Rightarrow$ zwei weitere Lösungen.

$t^2 - 8t < 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 > 0 \quad \vee \quad t_2 < 8 \quad \Rightarrow$ keine weitere Lösung.

Anzahl der Lösungen	Werte für t
0	---
1	$t_1 > 0 \quad \vee \quad t_2 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \left]0;8\right[$
2	$t = 8$
3	$t > 8$

❹ Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte für folgende Funktionen:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 2x^2}{x}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x - 2x^2}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x^2}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f_t(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{tx^2 - 1}{3x^2 + t}$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-2x^2}{x} \;\to\; -\infty$

Grund: Zählergrad > Nennergrad und Zähler negativ, Nenner positiv

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-2x^2}{x} \;\to\; \infty$

Grund: Zählergrad > Nennergrad und Zähler negativ, Nenner negativ

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x^2} \;\to\; 0$ ***Grund: Zählergrad < Nennergrad***

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x^2} \;\to\; 0$ ***Grund: Zählergrad < Nennergrad***

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f_t(x) \;=\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{tx^2-1}{3x^2+t} \;\to\; \dfrac{1}{3}t$ ***Grund: Zählergrad = Nennergrad***

❺ **Begriffsdefinition**

Definieren Sie den Begriff „Stetigkeit" in mathematischer Form.

Lösung: Stetigkeit in $x_0 \in [a\,;b]$ liegt vor, wenn gilt:

(i) $\lim\limits_{h\to0} f(x_0+h) = \lim\limits_{h\to0} f(x_0-h) = f(x_0)$ und

(ii) $f(x_0)\; existiert$

❻ **Abschnittweise definierte Funktionen mit/ohne Parameter**

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Stetigkeit und

begründen Sie Ihre Entscheidung:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x & x<3 \\ \dfrac{1}{3}x+4 & x\geq 3 \end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{\substack{x\to 3+h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{h\to 0} f(3+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{3}\cdot(3+h)+4\right]\overset{\substack{Grenzwert\\ übergang}}{=} 1+4=5 \quad und$$

$$\lim_{\substack{x\to 3-h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{h\to 0} f(3-h)=\lim_{h\to 0}\left[(3-h)^2-2(3-h)\right]\overset{\substack{Grenzwert\\ übergang}}{=} 9-6=3$$

Ergebnis: $f(x)$ ist nicht stetig, weil $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)\neq \lim_{h\to 0} f(x_0-h)$

b) Welche Werte müssen die Parameter $\mathbf{t}$ und $\mathbf{k}$ annehmen, damit die Funktion $g_{t,k}(x)$ stetig ist?

$$g_{t,k}(x)=\begin{cases}-2x^2+x+3 & x<-1\\ t & x=-1\\ 3x+2k & x>-1\end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{\substack{x\to -1-h\\ h\to 0}} g(x)=\lim_{h\to 0} g(-1-h)=\lim_{h\to 0}\left[-2(-1-h)^2+(-1-h)+3\right]\overset{\substack{Grenzwert\\ übergang}}{=} 0$$

Es gilt laut Vor.: $g(-1)=t \quad \Rightarrow \quad t=0$

$$\lim_{\substack{x\to -1+h\\ h\to 0}} g(x)=\lim_{h\to 0} g(-1+h)=\lim_{h\to 0}\left[3\cdot(-1+h)+2k\right]\overset{\substack{Grenzwert\\ übergang}}{=} -3+2k \overset{\text{laut Vor.}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad k=\frac{3}{2}$$

Ergebnis: $g(x)$ ist stetig, wenn gilt: t = 0 und k = $\frac{3}{2}$

❼ **Untersuchung gebr.-rat. Funktionen**

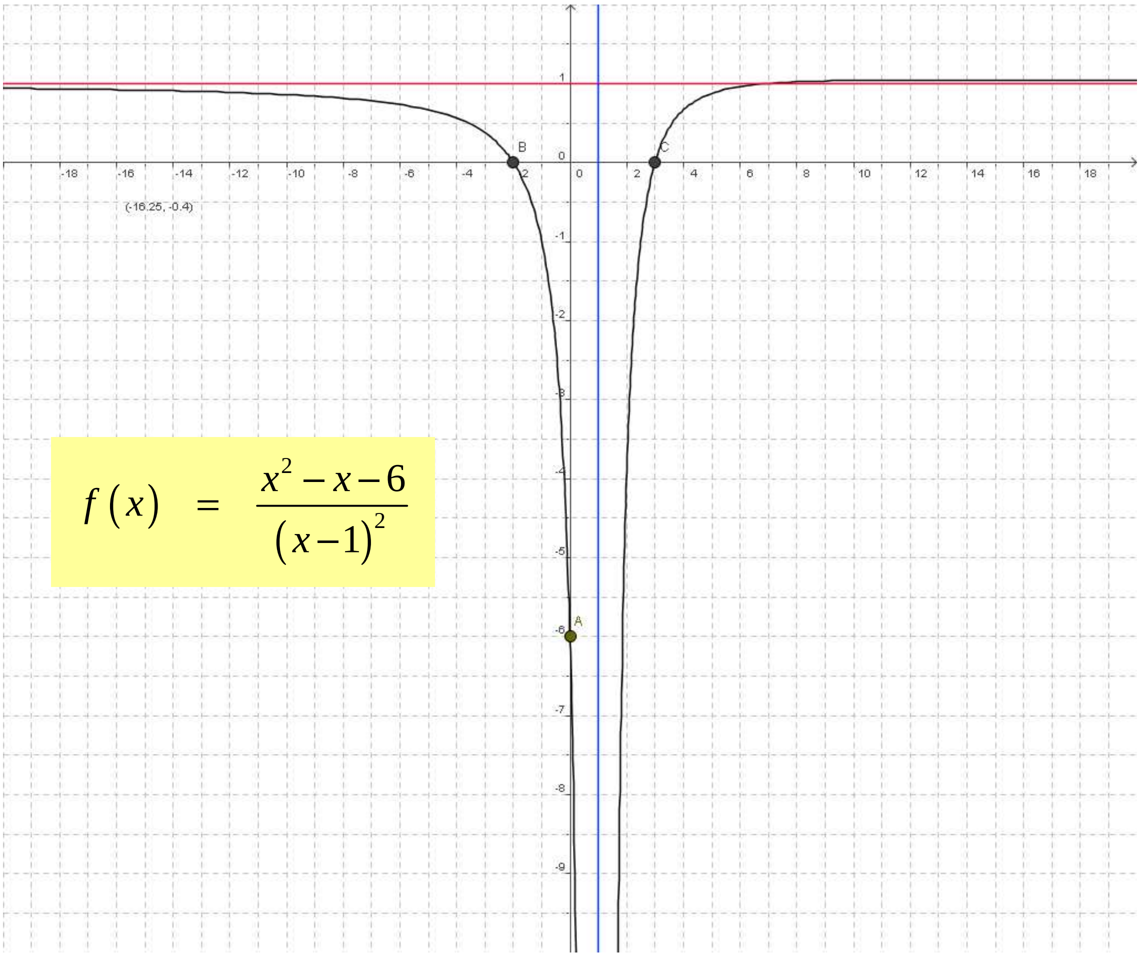
Untersuchen Sie die gebr.-rat. Funktionen nach folgenden Kriterien:

(i)	Definitionsbereich	(ii)	Symmetrie
(iii)	Nullstelle(n)	(iv)	Polstellen / Lücke(n)
(v)	Schnittstelle mit y-Achse	(vi)	Asymptote
(vii)	Zeichnung der Funktion		

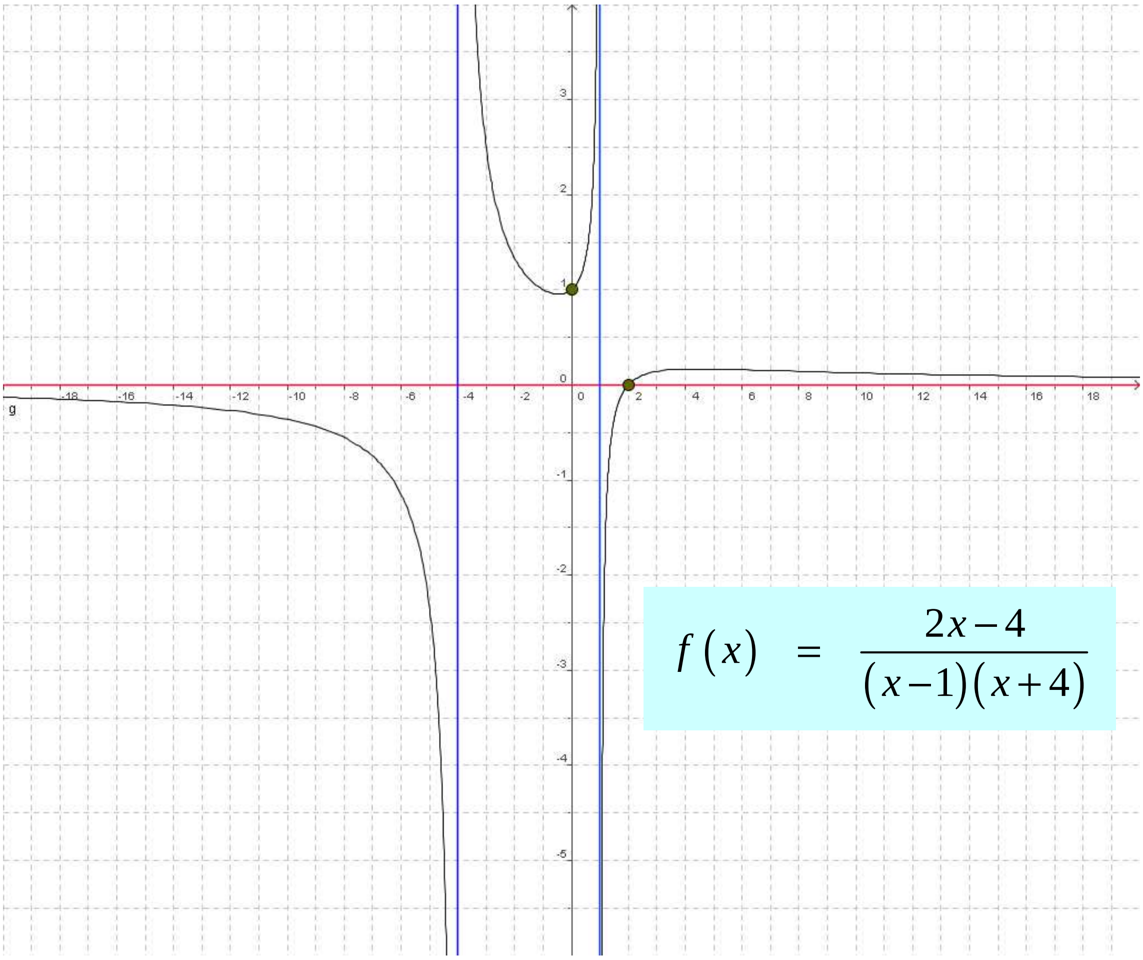
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{(x-1)^2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x-4}{(x-1)(x+4)}$

Lösung:

Kriterium	**Funktion 1**	**Funktion 2**
	$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{(x-1)^2}$	$f(x) = \dfrac{2x-4}{(x-1)(x+4)}$
Defini-tions-bereich	$D = \Re \setminus \{1\}$	$D = \Re \setminus \{-4;1\}$
Symmet-rie	$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - (-x) - 6}{[(-x)-1]^2}$ $= \dfrac{x^2 + x - 6}{(-x-1)^2} \neq f(-x) \wedge \neq -f(x)$ $\Rightarrow$ *keine Symmetrie*	$f(-x) = \dfrac{2(-x)-4}{[(-x)-1][(-x)+4]}$ $= \dfrac{-2x-4}{(-x-1)(-x+4)} \neq f(-x)$ $\wedge \neq -f(x) \Rightarrow$ *keine Symmetrie*
Null-stelle(n)	$x_1 = -2 \wedge x_2 = 3$	$x = 2$
Pol-stellen	$x = 1\,(\text{doppelt})$	$x_1 = -4 \wedge x_2 = 1$
Schnitt-punkt mit y-Achse	$S_y(0 \mid -6)$	$S_y(0 \mid 1)$
Grenzwert & Asym-ptote	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ $a(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ $a(x) = 0$



$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{(x-1)^2}$$



$$f(x) = \frac{2x-4}{(x-1)(x+4)}$$

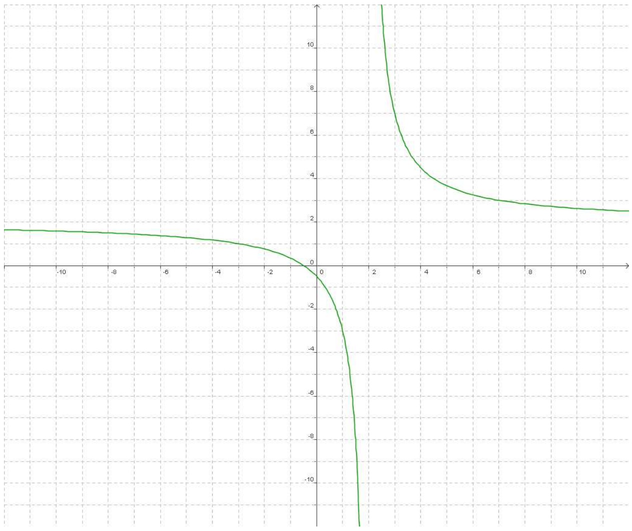
❽ Zuordnung: Funktion - Graph

Gegeben seien drei Funktionsvorschriften f1 bis f3 und ein Graph.

$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4}$$

$$f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4}$$

$$f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$



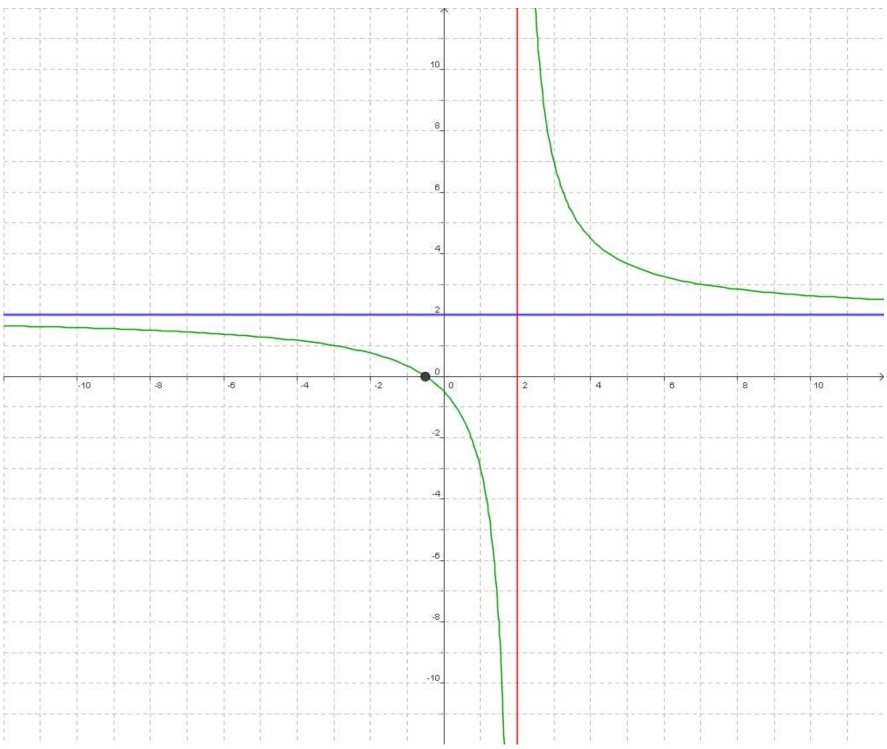
a) Auf welche der drei Funktionsvorschriften passt der Graph?

b) Zeichnen Sie die beiden anderen Funktionsvorschriften in das obige Koordinatensystem.

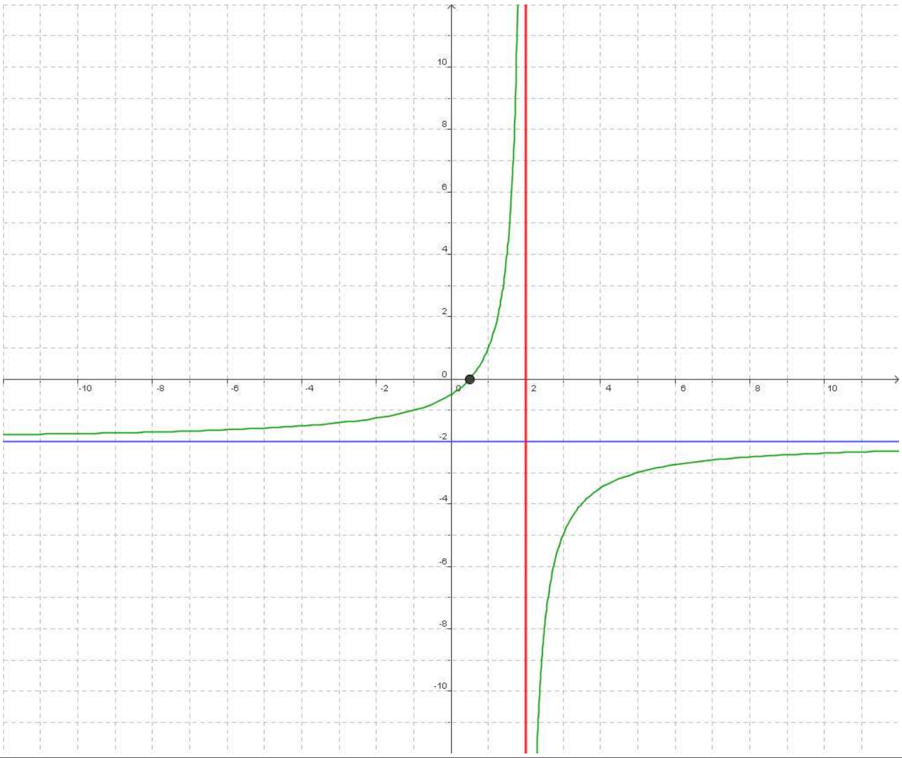
Begründen Sie die Zuordnung und die Zeichnung aufgrund der Nullstellen, der A-symptote und der und Polstellen!

<u>Lösung:</u>

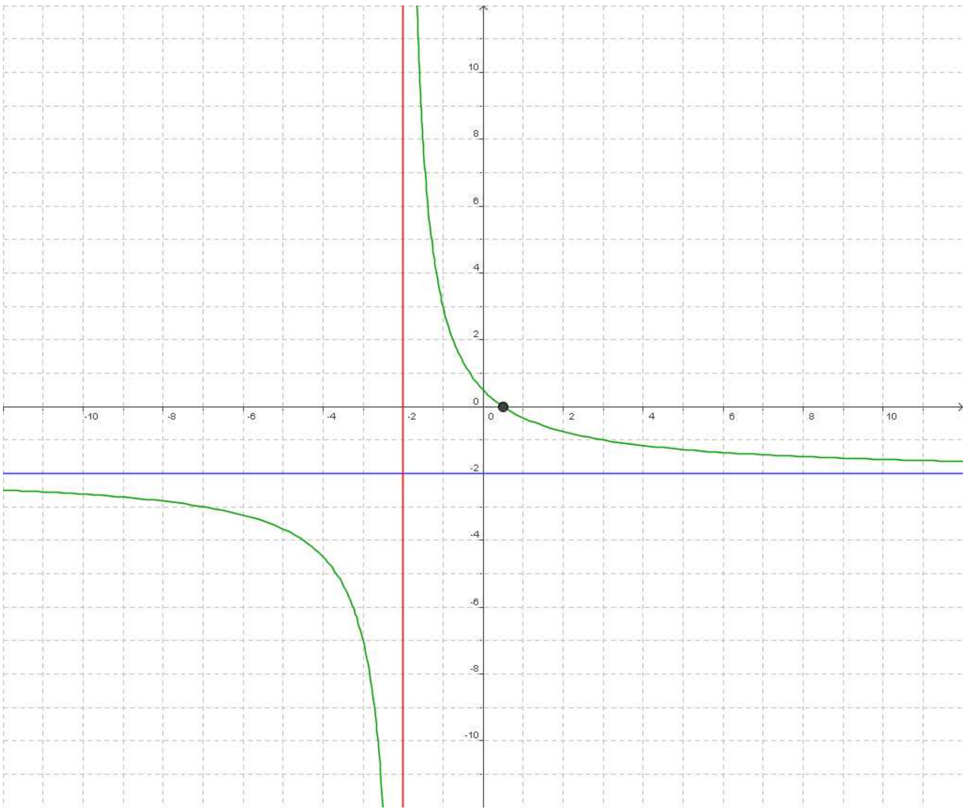
Kriterium	Nullstelle	Polstelle	Asymptote	Funktionsvorschrift
a) Graph	$x=-\frac{1}{2}$	$x=2$	$a(x)=2$	$f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4}$



Kriterium	Nullstelle	Polstelle	Asymptote	Funktionsvorschrift
b) Eigenschaften f1	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$	$a(x)=-2$	$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4}$



Kriterium	Nullstelle	Polstelle	Asymptote	Funktionsvorschrift
Eigenschaften f3	$x=\frac{1}{2}$	$x=-2$	$a(x)=-2$	$f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$



❾ Abstandsbrechnungen

Ab welchen Werten beträgt der Abstand zwischen der Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{4x+2}{2x+4}$$

und ihrem Grenzwert g noch höchstens $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Bitte mit Fallunterscheidung!

<u>Lösung:</u>

$$\text{Ansatz}: \quad \left|f(x)-g\right| \le \varepsilon$$

$$\left|\frac{4x+2}{2x+4}-2\right| \le \frac{1}{10} \xrightarrow{\text{Hauptnenner}} \left|\frac{4x+2-2\cdot(2x+4)}{2x+4}\right| \le \frac{1}{10}$$

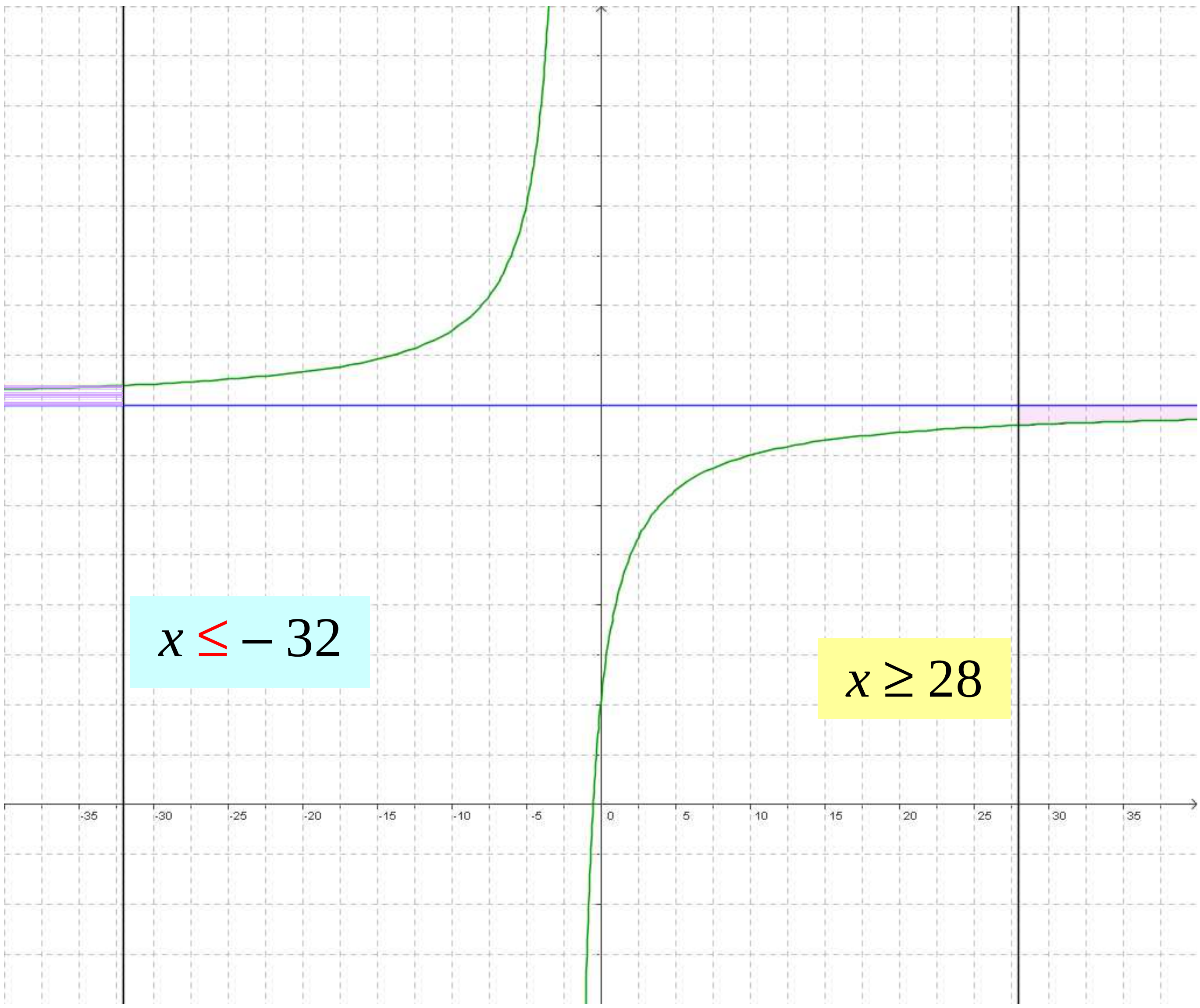
$$\xrightarrow{\text{Lösen}} \left|\frac{-6}{2x+4}\right| \le \frac{1}{10}$$

$$\text{Fall 1}: \quad \frac{-6}{2x+4} > 0 \Rightarrow 2x+4 < 0 \Rightarrow x < -2$$

$$\frac{-6}{2x+4} \le \frac{1}{10} \xrightarrow[\cdot 10]{\cdot(2x+4)} -60 \ge 2x+4 \Rightarrow -64 \ge 2x \Rightarrow -32 \ge x$$

$$\text{Fall 2}: \quad \frac{-6}{2x+4} < 0 \Rightarrow 2x+4 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$-\frac{-6}{2x+4} \le \frac{1}{10} \xrightarrow[\cdot 10]{\cdot(2x+4)} 60 \le 2x+4 \Rightarrow 56 \le 2x \Rightarrow 28 \le x$$


$x \leq -32$
$x \geq 28$
-35
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30
35