Musterlösung **11. Jgst.** **5. Kursarbeit** **Datum: 21.06.2007**

Klasse: GY 06 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Nicht-rationale Funktionen (insbes. Exponentialfunktionen); Newton-Iteration**

---

❶ Der Punkt P liegt auf der Exponentialkurve $f(x) = a^x$.
Berechnen Sie die Basis a.

$$a)\quad P\left(-3 \,\middle|\, \frac{64}{27}\right) \qquad\qquad b)\quad P\left(\frac{1}{8} \,\middle|\, \sqrt[4]{2}\right)$$

Lösung:

$$a)\quad f(-3) = a^{-3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{1}{a^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow a^3 = \frac{27}{64} \xrightarrow{\sqrt[3]{}} a = \frac{3}{4}$$

$$b)\quad f\left(\frac{1}{8}\right) = a^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow a^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{\text{potenziert mit 8}} a = 4$$

❷ Von einer Exponentialfunktion $x \rightarrow q^x$ weiß man, dass sie um
a) 8 % wächst, b) 15 % abnimmt,
wenn x um eine Einheit zunimmt.

Bestimmen Sie die Basis q.

Lösung:

$$a)\quad \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1{,}08 \qquad\qquad b)\quad \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0{,}85$$

❸ Die Punkte P und Q liegen auf der Exponentialkurve $f(x) = c \cdot a^x$.
Berechnen Sie den Faktor c und die Basis a.

$$a)\quad P\left(2 \,\middle|\, \frac{16}{3}\right)\quad Q\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{12}\right) \qquad\qquad b)\quad P(-2 \mid 50)\quad Q\left(3 \,\middle|\, \frac{2}{125}\right)$$

Lösung:

a)

$$I)\quad f(2) = ca^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow c = \frac{16}{3a^2}$$

$$II)\quad f(-1) = ca^{-1} = \frac{1}{12} \Rightarrow c = \frac{a}{12} \xrightarrow{\textit{gleichsetzen}} \frac{16}{3a^2} = \frac{a}{12}$$

$$\Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \cdot 4^x$$

b)

$$I)\quad f(-2) = ca^{-2} = 50 \Rightarrow \frac{c}{a^2} = 50 \Rightarrow c = 50a^2$$

$$II)\quad f(3) = ca^3 = \frac{2}{125} \xrightarrow{c\ einsetzen} 50\cdot a^2\cdot a^3 = \frac{2}{125}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

❹ **Gleichungen:** Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen

a) $2^{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

Lösung:

$$2^{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow 2^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1}$$

$$\xrightarrow{Exponentenvergleich} x = -\frac{1}{2}$$

b) $2^{x} = \dfrac{4}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}$

Lösung:

$$2^x = \frac{4}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}} \Rightarrow 2^x = \frac{2^2}{2^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow 2^x = 2^{2-\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

c) $2^{3x+2}\cdot 16^{2x} = 4^{2x-4}$

Lösung:

$$2^{3x+2}\cdot 8^{2x} = 4^{2x-4} \Rightarrow 2^{3x+2}\cdot\left(2^3\right)^{2x} = \left(2^2\right)^{2x-4}$$

$$\Rightarrow 2^{3x+2}\cdot 2^{6x} = 2^{4x-8} \Rightarrow 2^{9x+2} = 2^{4x-8}$$

$$\Rightarrow 2^{5x} = 2^{-10} \xrightarrow{Exponentenvergleich} 5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

d) $e^{3x+2} \cdot 3 \;=\; e^{-3x+3} \cdot 9$

__*Lösung:*__

$$e^{3x+2} \cdot 3 \;=\; e^{-3x+3} \cdot 9 \xrightarrow[:e^{-3x+3}]{:3} \frac{e^{3x+2}}{e^{-3x+3}} \;=\; 3 \;\Rightarrow\; e^{3x+2+3x-3} \;=\; 3$$

$$\Rightarrow\; e^{6x-1} \;=\; 3 \xrightarrow{\ln} 6x-1 \;=\; \ln 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln(3)+1}{6} \approx 0{,}35$$

e) $3 \cdot e^{2x} - 18 \cdot e^{x} - 3 \;=\; 45$

__*Lösung:*__

$$3 \cdot e^{2x} - 18 \cdot e^{x} - 3 \;=\; 45 \xrightarrow[:3]{-45} e^{2x} - 6e^{x} - 16 \;=\; 0$$

$$\xrightarrow[u := e^{x}]{Substitution} u^{2} - 6u - 16 \;=\; 0$$

$$u_{1/2} \;=\; \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \;=\; \frac{6 \pm 10}{2} \;\Rightarrow\; u_1 = 8 \;\vee\; u_2 = -2$$

$$\xrightarrow[u := e^{x}]{\mathrm{Re}\,Substitution} u_1 = e^{x} = 8 \xrightarrow{\ln} x = \ln 8 \approx 2{,}079$$

$$\xrightarrow[u := e^{x}]{\mathrm{Re}\,Substitution} u_2 = e^{x} = -2 \quad \text{keine Lösung, da nicht definiert}$$

❺ **Anwendungsaufgabe I**

Die Ägyptische Bevölkerung wächst exponentiell mit einem Prozentsatz von etwa 2 % an. Anfang 2003 wohnten ca. 74,7 Mio. Menschen in Ägypten.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Exponentialfunktion.

__*Lösung:*__ $f(x) \;=\; 74{,}7 \cdot 1{,}02^{x} \quad [\text{Ergebnis in Mio.}]$

b) Wie hoch ist die voraussichtliche Einwohnerzahl im Jahre 2010?

__*Lösung:*__ $f(7) \;=\; 74{,}7 \cdot 1{,}02^{7} \;=\; 85{,}8068\,[Mio.]$

c) Wie viel Einwohner wohnten 1900 in Ägypten?

__*Lösung:*__ $f(-103) \;=\; 74{,}7 \cdot 1{,}02^{-103} \;=\; 9{,}71634\,[Mio.]$

d) In welchem Jahr wohnten in Ägypten etwa 60 Mio. Menschen?

Lösung:

$$74{,}7\cdot 1{,}02^x = 60 \xrightarrow{:74{,}7} 1{,}02^x = \frac{60}{74{,}7}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln\left(\frac{60}{74{,}7}\right)}{\ln 1{,}02} \approx -11{,}06\,[\mathit{Jahre}] \Rightarrow ca.\,1991/1992$$

e) Die tatsächlichen Daten aus dem Internet liegen für das Jahr 2006 bei 78,887 Mio.

Wie hoch ist nach dieser Anzahl das tatsächliche durchschnittliche jährliche Wachstum?

Lösung:

$$74{,}7\cdot q^3 = 78{,}887 \xrightarrow{:74{,}7\,[Mio.]} q^3 = \frac{78{,}887}{74{,}7}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{}} q = \sqrt[3]{\frac{78{,}887}{74{,}7}} \approx \sqrt[3]{1{,}05605} \approx 1{,}018345$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: 1,8345 %

f) Nennen Sie **drei** große Städte in Ägypten.

Lösung: Kairo, Luxor, Assuan, Alexandria

❻ **Beweis**

Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein: Gegeben sei $f(x) = c\cdot a^x$

Dann gilt: $$\frac{f(x+1)}{f(x)} = a$$

Lösung:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \overset{einsetzen}{=} \frac{c\cdot a^{x+1}}{c\cdot a^x} \overset{Potenzgesetz}{=} \frac{c\cdot a^x\cdot a^1}{c\cdot a^x} \overset{Kürzen}{=} a$$

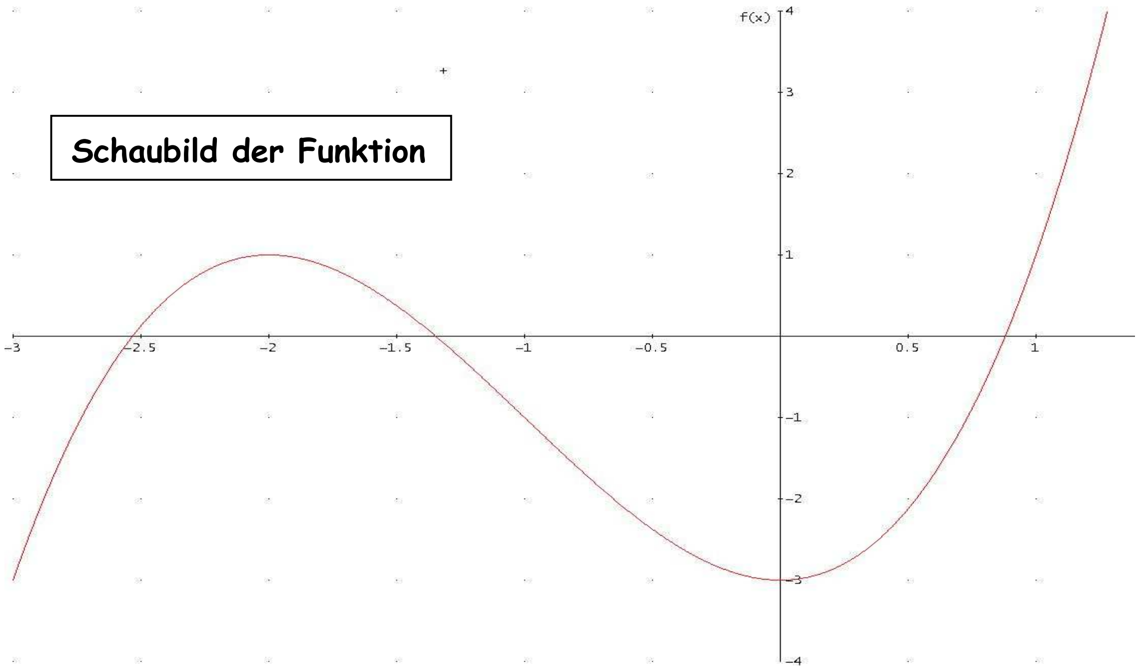
❼ Newton-Verfahren

Die nachstehend abgebildete Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ hat insgesamt drei nicht-ganzzahlige Nullstellen.

a) Bestimmen Sie die positive Nullstelle mittels Newton-Verfahren. Verwenden Sie hierfür den Startwert x = 1.

Führen Sie drei Näherungsschritte durch.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Lösung:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3 \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x$$

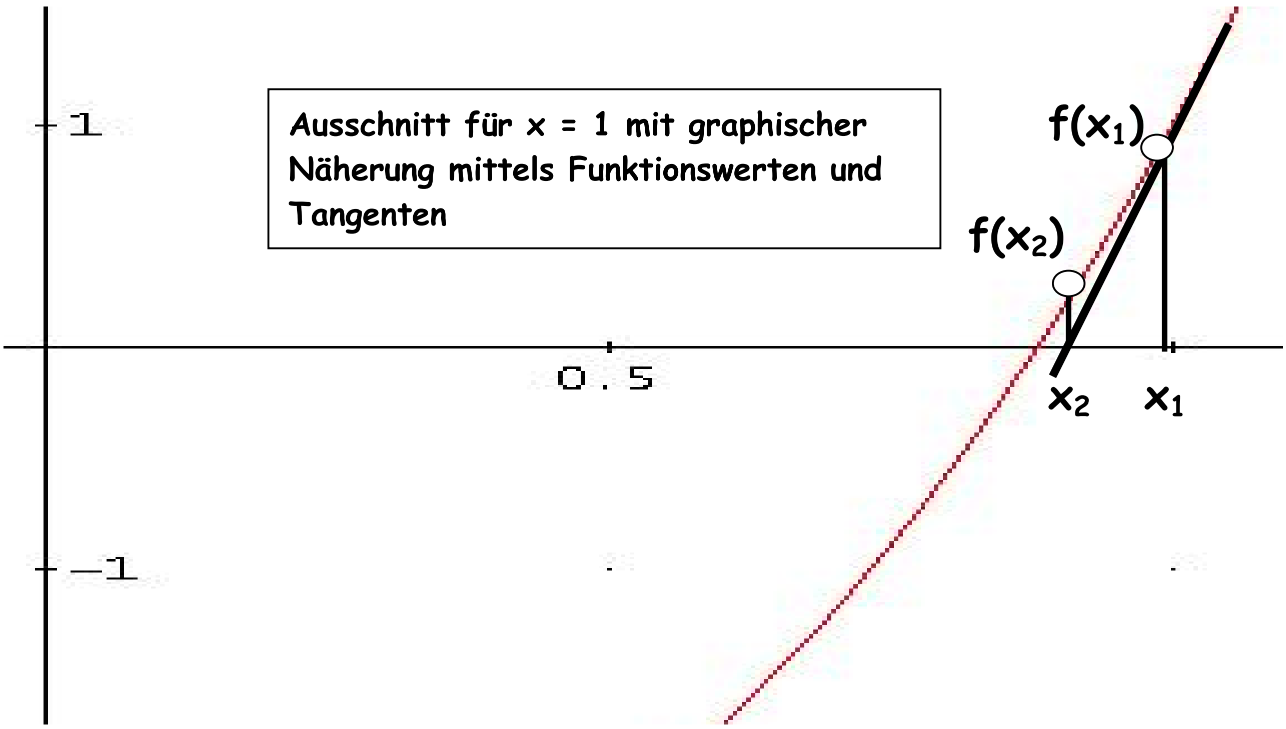
Startwert: x = 1

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1.0000000	1.0000000	9.0000000	0.888888
1	0.8888888	0.0727023	7.7037037	0.879451
2	0.8794515	0.0005038	7.5970145	0.879385

b) Nachfolgend sei der positive x-Abschnitt vergrößert dargestellt.

Erklären Sie **graphisch** und **analytisch-mathematisch** die Funktionsweise des Newton-Verfahrens und leiten Sie die Formel her.

<u>Lösung:</u>



Analytische Erklärung:

Nach Wahl eines geeigneten Startwertes x_1 werden der Funktionswert und der Wert der Ableitung an der Stelle berechnet. An dieser Stelle können somit der Wert der Steigung der Funktion als auch die Tangentensteigung ermittelt werden. Diese Ergebnisse werde miteinander gleichgesetzt und es entsteht folgender Ausdruck:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

Durch Auflösung nach x_2 entsteht eine erste Näherungsformel, die entsprechend fortgeschrieben bzw. verallgemeinert werden kann:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

❸ **Anwendungsaufgabe II**

Die radioaktive Substanz Wismut zerfällt allmählich und wandelt sich dabei in Polonium um.

a) Welche Masse ist von 10 g Wismut noch nach 12 Tagen vorhanden, wenn täglich 13 % zerfallen?

Lösung: $f(12) = 10 \cdot 0{,}87^{12} = 1{,}8803\,[g]$

b) Wann ist nur noch 1 g Wismut übrig?

Lösung:

$$10 \cdot 0{,}87^x = 1 \xrightarrow{:10} 0{,}87^x = 0{,}1$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}87} \approx 16{,}534\,[Tage]$$

c) Wie groß ist die Halbwertszeit?

Zeigen Sie, dass diese unabhängig vom Anfangsbestand ist!

Lösung:

$$c \cdot 0{,}87^x = \frac{1}{2}c \xrightarrow{:c} 0{,}87^x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0{,}87} \approx 4{,}977\,[Tage]$$

Aufgrund der Wahl von c als Anfangswert für $f(0)$ ist gezeigt, dass die Halbwertszeit unabhängig vom jeweiligen Startwert ist.

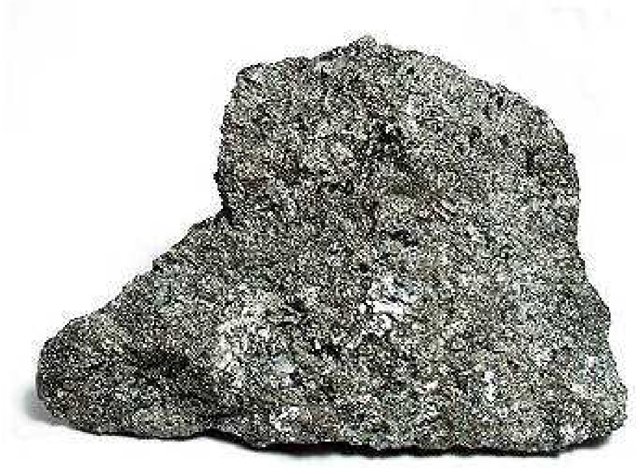
Zusatz: Wie lauten die chemischen Symbole für Wismut und Polonium im Periodensystem?

Lösung: Bi = Wismut Po = Polonium

Anmerkungen zu Wismut:

Eigenschaften:
Reines Bismut ist ein rötlichweiß glänzendes, relativ weiches Schwermetall, das nur wenig spröde ist. Die Sprödigkeit erhöht sich bei Verunreinigungen jedoch erheblich. Die elektrische und thermische Leitfähigkeit des Metalls ist relativ niedrig.

Geschichtliches:
Bismut wurde im 15. Jahrhundert von den Bergleuten Sachsens im Erzgebirge entdeckt. Das Element wurde im Jahre 1527 erstmals vom Arzt und Alchemist Paracelsus (1493-1541) beschrieben.



Wismut gediegen, Erzgebirge, Foto und Copyright: Thomas Seilnacht

Pechblende, La Creusa/Wallis, Foto und Copyright: Thomas Seilnacht