Musterlösung **11. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 12.12.2007**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: LGS, ganzrationale Funktionen höheren Grades, Horner-Schema, gebrochen-rat. Funktionen, Ökonom. Anwendungen

---

1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende reelle Funktion:

$$f(x) = 0{,}1\left(x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12\right)$$

a) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen x = 2 und x = - 3.

Lösung: **x = 2 => f(2) = - 1**

Das Hornerschema wurde hier für die ganzzahligen Koeffizienten durchgeführt, das Ergebnis dann mit 0,1 multipliziert

	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	1,00	-3,00	-9,00	23,00	-12,00	
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-3,00	-9,00	23,00	-12,00	
2	0,00	2,00	-2,00	-22,00	2,00	
	1,00	-1,00	-11,00	1,00	-10,00	f(x0)

x = -3 => f(-3) = 0

Das Hornerschema wurde hier für die ganzzahligen Koeffizienten durchgeführt, das Ergebnis dann mit 0,1 multipliziert ;-))

	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	1,00	-3,00	-9,00	23,00	-12,00	
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-3,00	-9,00	23,00	-12,00	
-3	0,00	-3,00	18,00	-27,00	12,00	
	1,00	-6,00	9,00	-4,00	0,00	f(x0)

b) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion.

Lösung: **1. Nullstelle: x = -3 (siehe oben)**

2. und 3. Nullstelle: x = 1 **4. Nullstelle: x = 4**

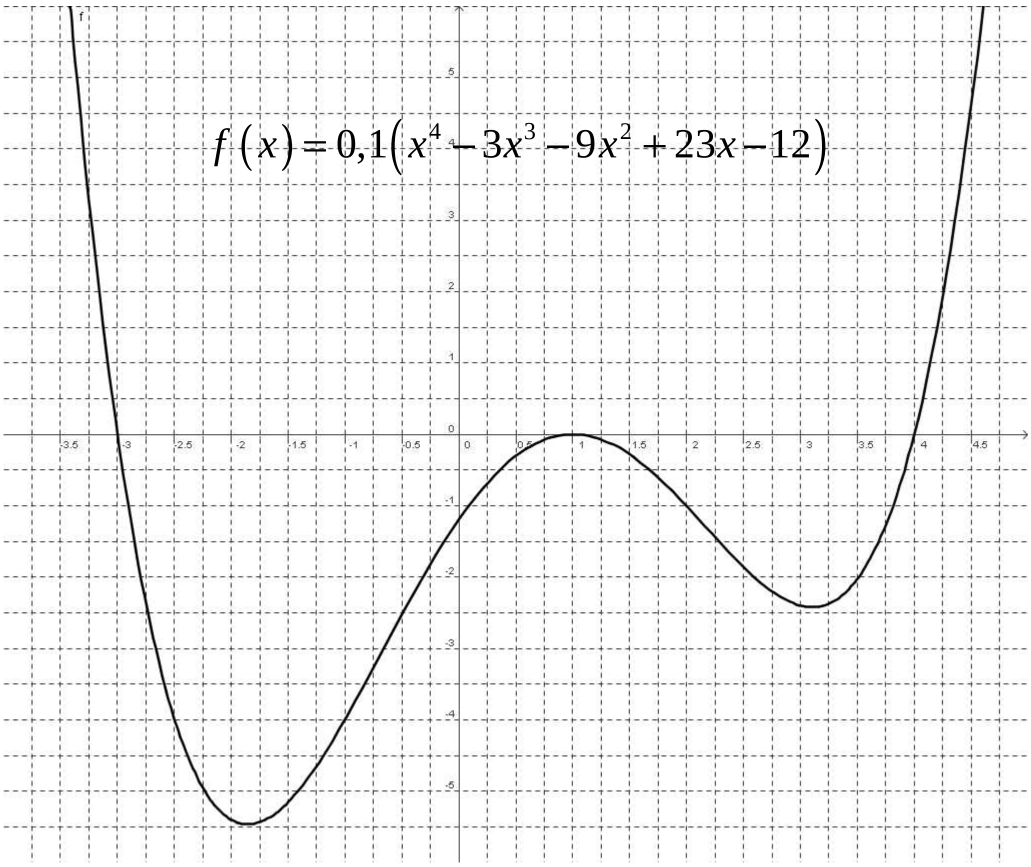
Weitere Nullstellen werden durch Abspalten per Polynomdivision ermittelt; danach quadratisches Restpolynom.

Oder komplette Berechung per Hornerschema

	x4	x3	x2	x1	x0
f(x) =	1,00	-3,00	-9,00	23,00	-12,00
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)
	1,00	-3,00	-9,00	23,00	-12,00
-3	0,00	-3,00	18,00	-27,00	12,00
	1,00	-6,00	9,00	-4,00	0,00
1	0,00	1,00	-5,00	4,00	
	1,00	-5,00	4,00	0,00	
1	0,00	1,00	-4,00		
	1,00	-4,00	0,00		
4	0,00	4,00			
	1,00	0,00			

c) Wie lautet der Schnittpunkt mit der y-Achse?

Lösung: $f(0) = -1,2 \quad \Rightarrow \quad S_y\left(\underline{0 \mid -1,2}\right)$



2.) Ermitteln einer ganzrationalen Funktion vom Grad n = 3

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion dritten Grades deren Graph durch die gegebenen Punkte verläuft:

$$A(0 \mid -4), B(1 \mid -1{,}5), C(2 \mid -2) \quad und \quad D(-3 \mid 0{,}5)$$

Lösung:

Ansatz:

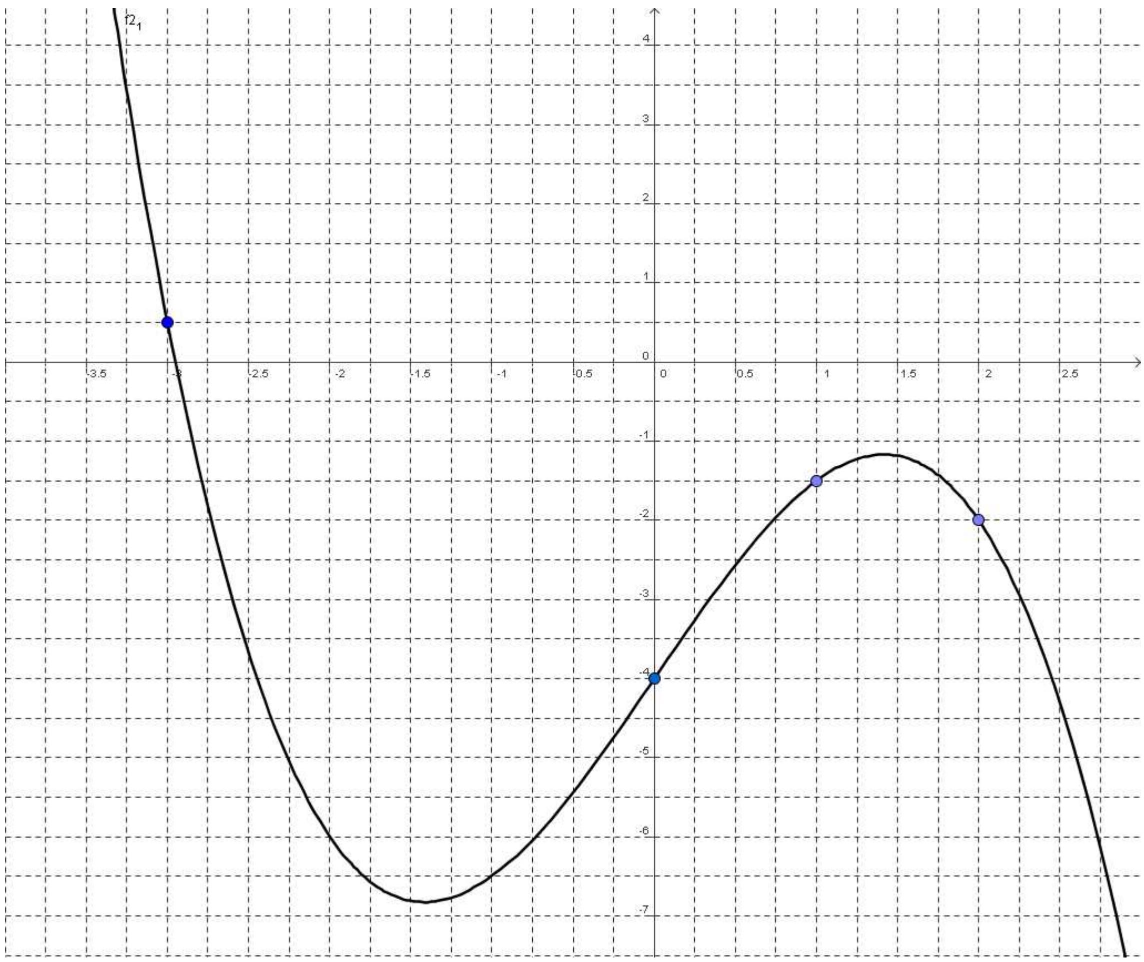
$$\left.\begin{array}{lll} I.) & d = -4 & \\ II.) & a+b+c-4 & = -1{,}5 \\ III.) & 8a+4b+2c-4 & = -2 \\ IV.) & -27a+9b-3c-4 & = 0{,}5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} I.) & d = -4 & \\ II.) & a+b+c & = 2{,}5 \\ III.) & 8a+4b+2c & = 2 \\ IV.) & -27a+9b-3c & = 4{,}5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad c \quad = 2{,}5 - a - b \quad \text{einsetzen in } III.) \text{ und } IV.)$$

$$\left.\begin{array}{lll} III.) & 8a+4b+2(2{,}5-a-b) & = 2 \\ IV.) & -27a+9b-3(2{,}5-a-b) & = 4{,}5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} III.) & 6a+2b & = -3 \\ IV.) & -24a+6b & = 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad a = -0{,}5 \quad b = 0 \quad c = 3 \quad d = -4$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -0{,}5x^3 + 3x - 4$$



b) Eine Parabel dritter Ordnung verläuft symmetrisch zum Ursprung (Punktsymmetrie) durch die Punkte $A\left(2 \;\middle|\; \frac{21}{4}\right)$ und $B(-4 \mid -12)$.

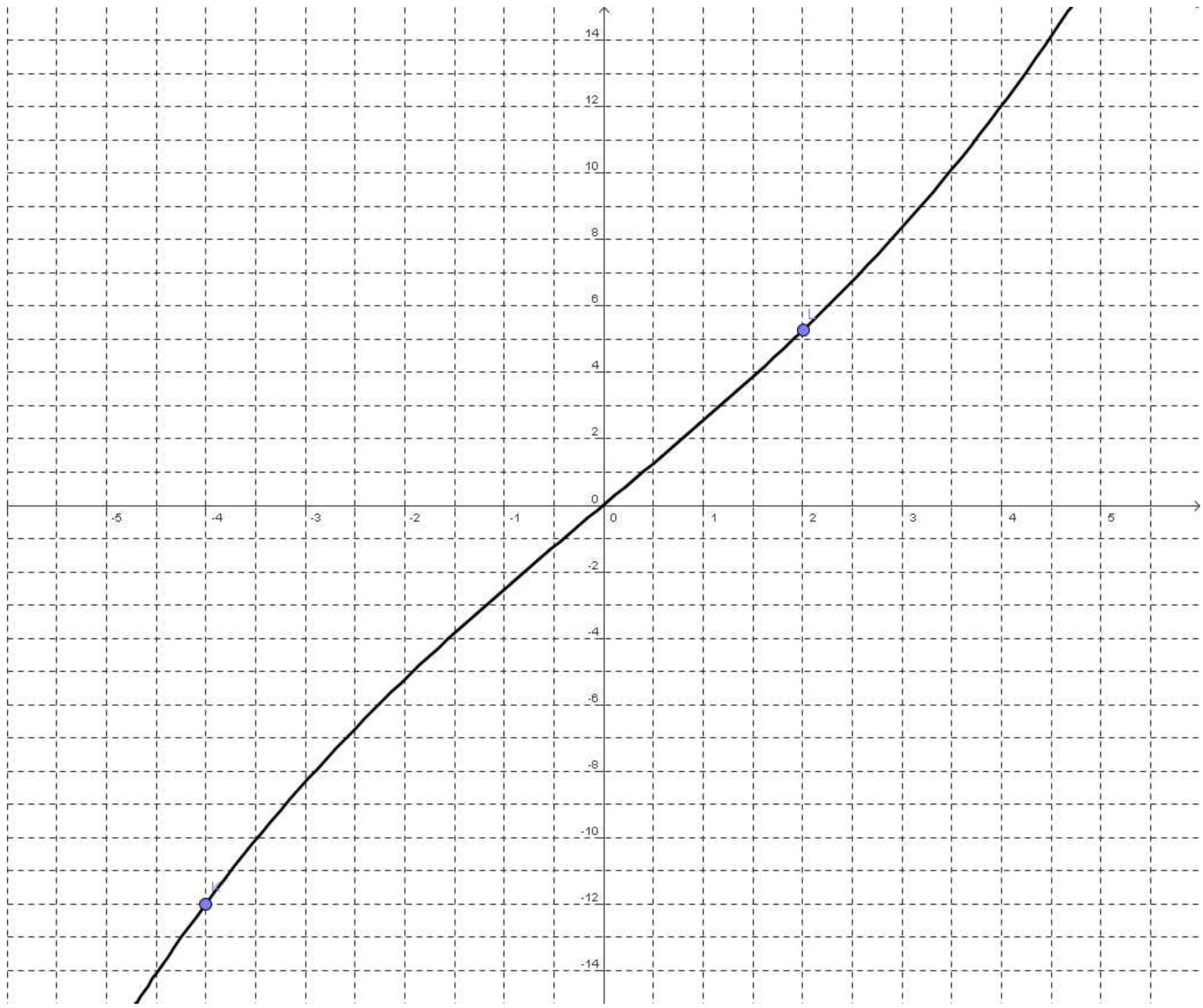
Bestimmen Sie die Parabelgleichung.

Lösung:

wegen der Punktsymmetrie gilt: $f\left(x\right) = ax^3 + bx$

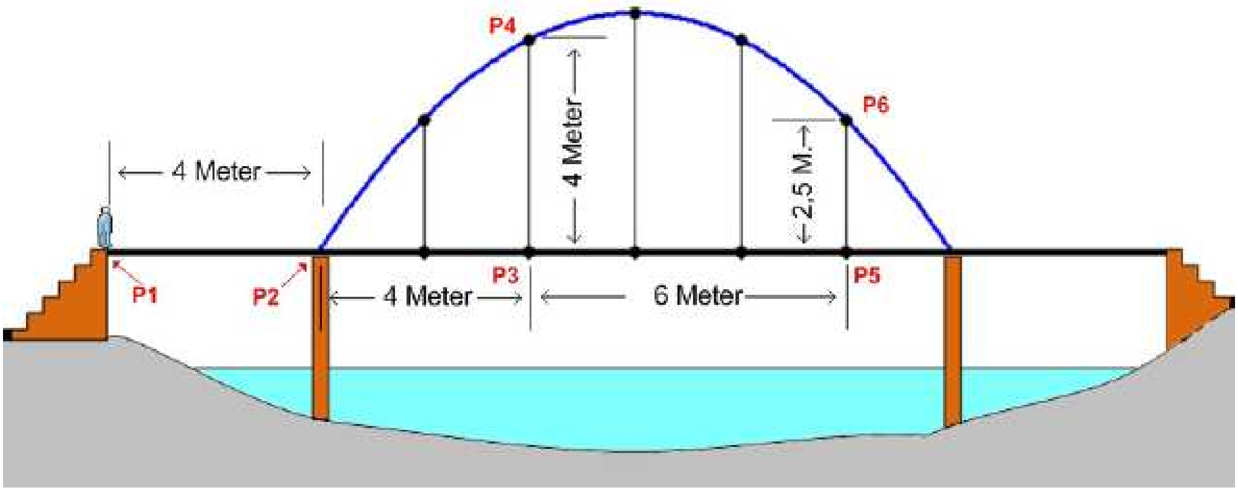
$I.)\quad 8a + 2b = \frac{21}{4} \qquad II.)\quad -64a - 4b = -12$

$\xrightarrow{I.)\cdot 2 + II.)} \quad -48a = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{5}{2}x$



3.) Parabeln zweiter Ordnung in der Realität

Eine Fußgängerbrücke wird von einem parabelförmigen Brückenbogen getragen.



a) Wie lang ist die gesamt Fußgängerbrücke?

Lösung: **Die Teilabschnitte müssen addiert werden: 4 + 4 + 6 + 2 + 4 = 20**

b) Berechnen Sie die Gleichung des Brückenbogens anhand der Punkte **P2**, **P4** und P6 und **wählen Sie die Lage des Koordinatensystem geschickt!**

Lösung:

$$P_2(0 \mid 0);\ P_4(4 \mid 4) \quad und \quad P_6(10 \mid 2{,}5) \quad mit \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$I.)\ c = 0 \qquad II.)\ 16a + 4b = 4 \qquad III.)\ 100a + 10b = 2{,}5$$

$$\xrightarrow{5 \cdot II - 2 \cdot III} -120a = 15 \Rightarrow a = -\frac{15}{120} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

4.) Ökonomische Anwendungen

Gegeben sind die Kostenfunktion $k(x) = 0{,}5x^2 + 4x + 3{,}5$

und die Erlös-Funktion $E(x) = -1{,}5(x-2)^2 + 6(x-2) + 18$

a) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $p_N(x)$.

Lösung:

$$E(x) = -1{,}5(x-2)^2+6(x-2)+18 = -1{,}5x^2+12x$$

$$p_N(x) = \frac{E(x)}{x} = -1{,}5x+12$$

b) Wie lautet der ökonomische Definitionsbereich.

Lösung:

$$E(x) = 0 \Rightarrow x(-1{,}5x^2+12) = 0 \Rightarrow x_1=0 \wedge x_2=8$$

$$D = [0;8]$$

c) Wo liegen Gewinnschwelle und Gewinngrenze?

Lösung:

$$G(x) = E(x)-k(x) \Rightarrow G(x) = -1{,}5x^2+12x-\left(\frac{1}{2}x^2+4x+\frac{7}{2}\right)$$

$$\Rightarrow G(x) = -2x^2+8x-\frac{7}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-8\pm\sqrt{64-28}}{-4} = \frac{-8\pm 6}{-4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0{,}5\,[Gewinnschwelle] \wedge x_2 = 3{,}5\,[Gewinngrenze]$$

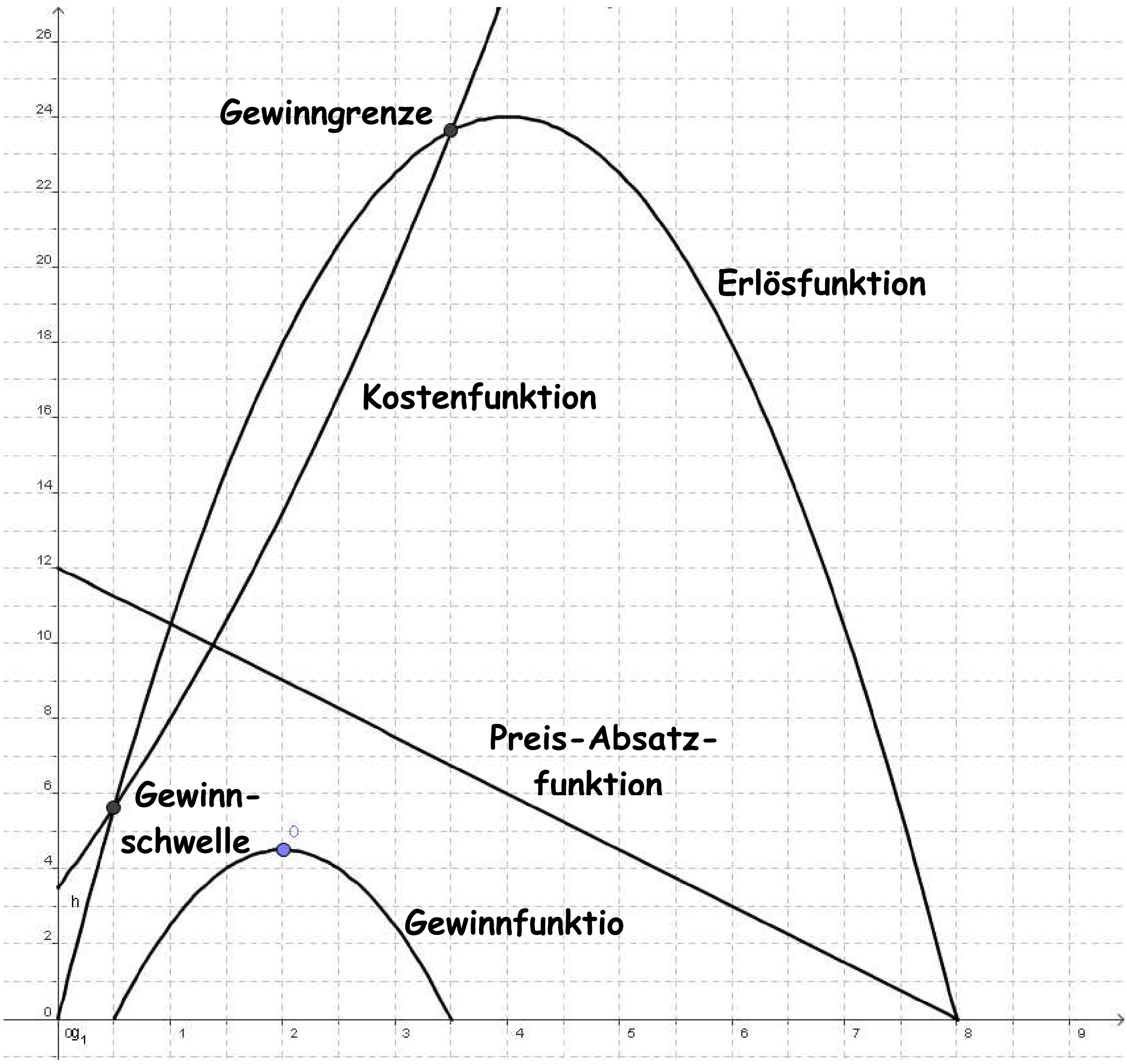
d) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Lösung:

$$G(x) = -2x^2+8x-\frac{7}{2} = -2\left(x^2-4x+\frac{7}{4}\right)$$

$$G(x) = -2\left[\left(x^2-4x+2^2\right)-2^2+\frac{7}{4}\right] = -2(x-2)^2+4{,}5$$

$$\Rightarrow G_{\max} = (2 \mid 4{,}5)$$



5.) Scheitelpunkt einer Brücke

Hier sehen Sie die Brücke Stari Most. Die **Alte Brücke** ist das namensgebende Wahrzeichen der Stadt Mostar in Bosnien-Herzegowina.

Sie überspannt die Neretva und verbindet den mehr bosniakisch geprägten Ostteil mit dem stärker kroatisch geprägten Westteil der Stadt.

Mit einer Breite von ?? m und ?? m Höhe (im Scheitelpunkt über der Neretva) war sie zur Zeit ihrer Erbauung ein Meisterwerk der Baukunst.

Wie breit und hoch ist eigentlich die Brücke, wenn man von einer Parabelgleichung von

$$p(x) = -0,05x^2 + 2x$$

ausgeht?

Lösung:

$$p(x) = -0,05\left(x^2 - 40x\right) = -0,05\left[\left(x^2 - 40x + 20^2\right) - 20^2\right] = -0,05(x-20)^2 + 20$$

$$S(20 \mid 20)$$

=> Breite: 40 m und Höhe: 20 m

6.) Gebrochen-rationale Funktionen konstruieren

Erstellen Sie eine gebrochen-rationale Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Polstelle mit VZW bei x = 2 und Nullstelle bei x = -1.

Lösung: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

b) Polstelle ohne VZW bei x = 4, doppelte Nullstelle bei x = 3 und Asymptote mit a(x) = 2

Lösung: $f(x) = \dfrac{2(x-3)^2}{(x-4)^2}$

7.) Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen

Gegeben seien die drei Funktionen

(i) $f(x)=\dfrac{3(x-4)}{2(x-1)}$ (ii) $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ (iii) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

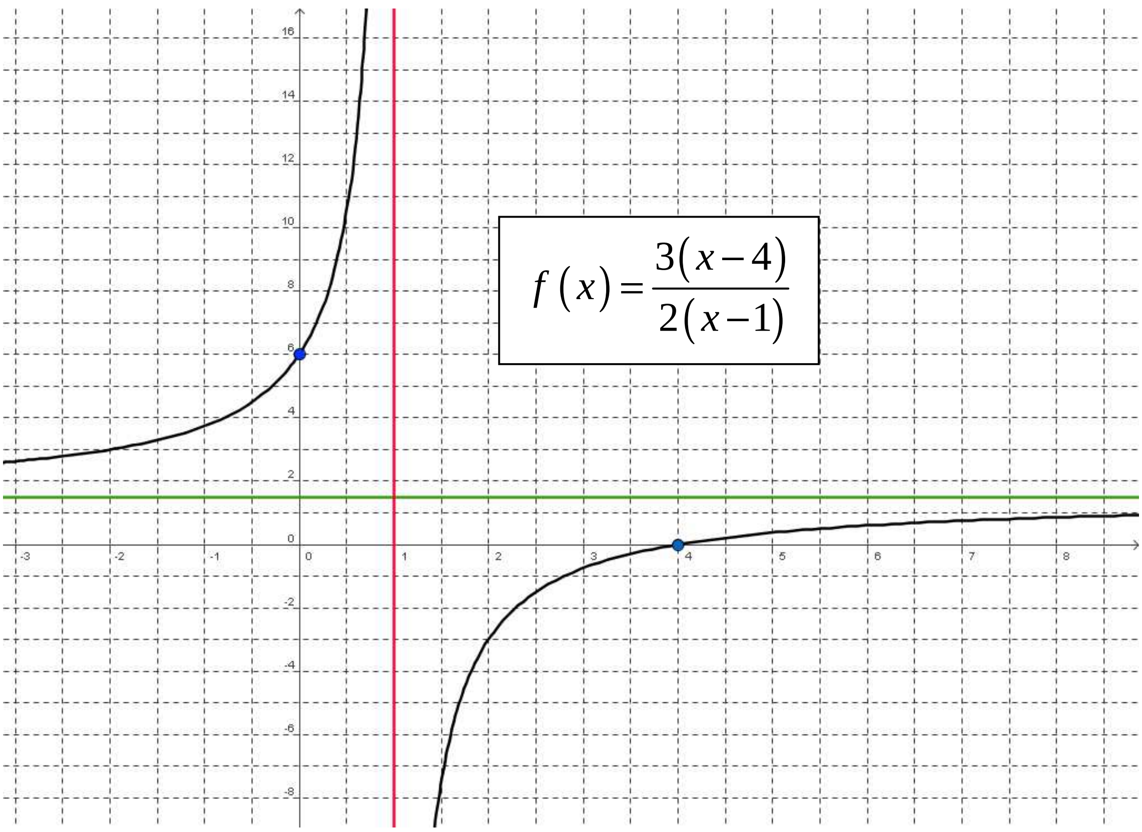
a) Untersuchen Sie die drei Funktionen hinsichtlich ihrer Asymptote, Polstellen, Nullstellen und ihres Schnittpunktes mit der y-Achse

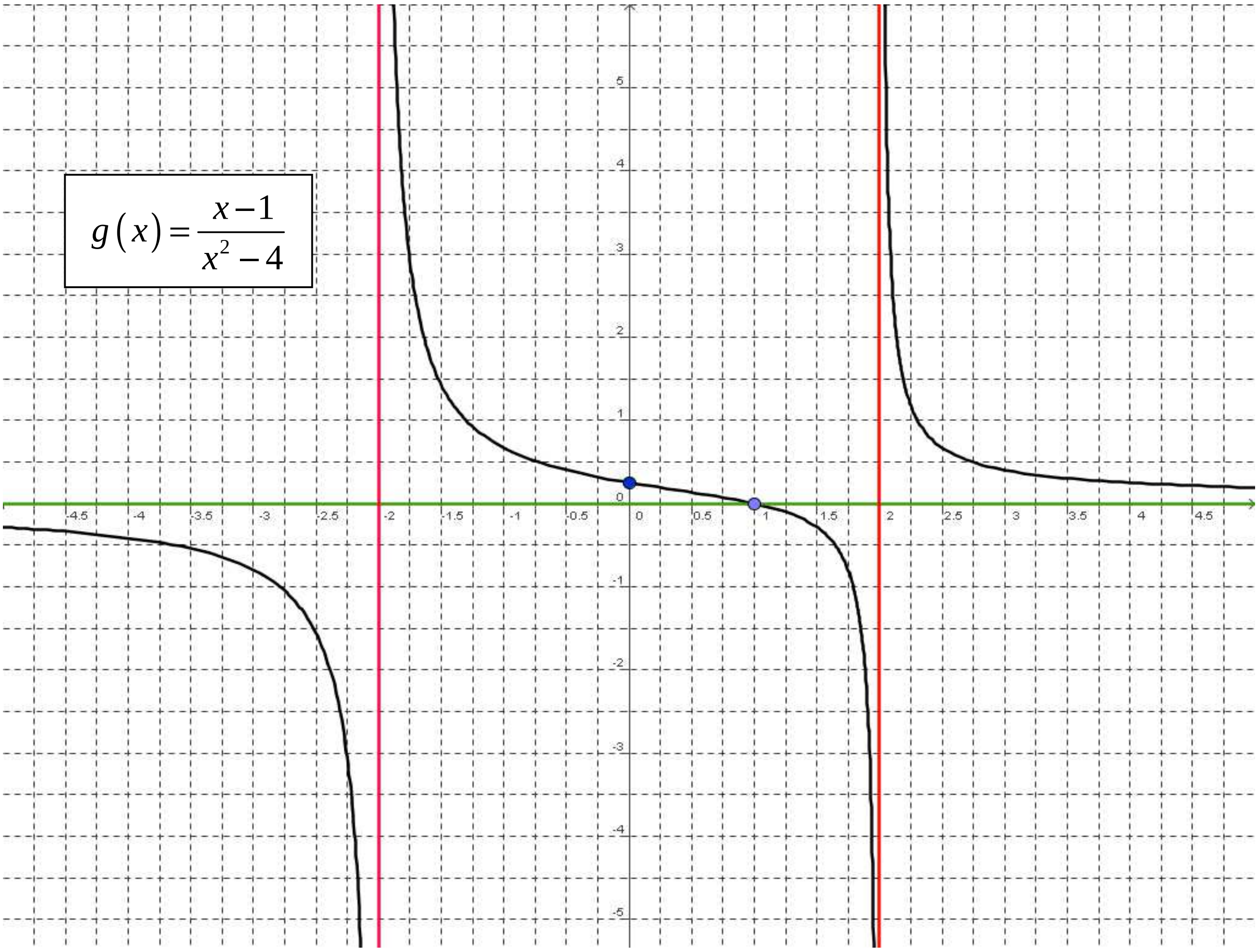
Lösung:

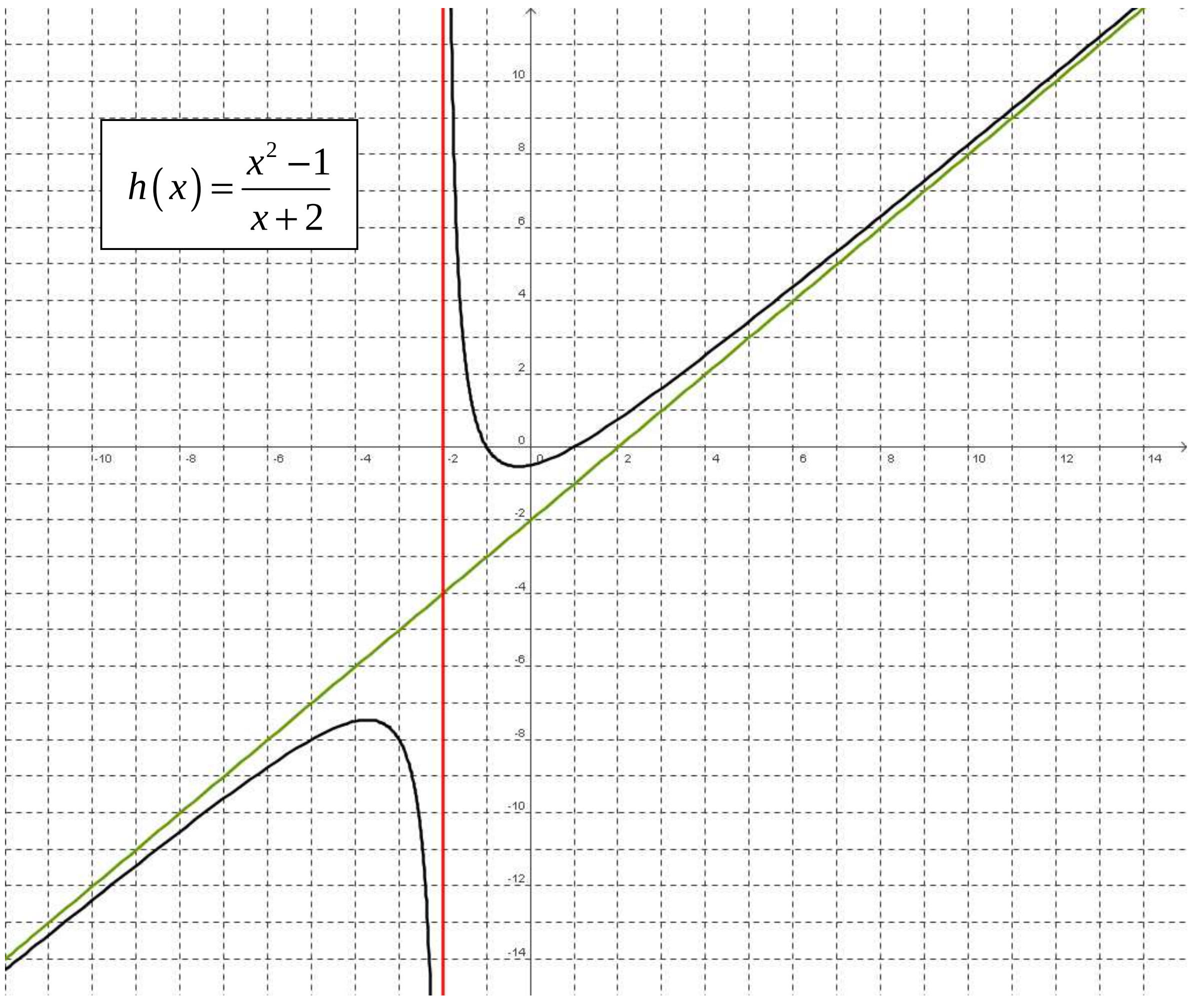
	$f(x)=\dfrac{3(x-4)}{2(x-1)}$	$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$	$h(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$
Nullstelle(n)	**x = 4**	**x = 1**	**x = 1 und x = - 1**
Polstelle(n)	**x = 1**	**x = 2 und x = - 2**	**x = - 2**
S_y	$(0 \mid 6)$	$(0 \mid 0{,}25)$	$(0 \mid -0{,}5)$
Asymptote	**a(x) = 1,5**	**a(x) = 0**	**a(x) = x-2**

b) Fertigen Sie je eine Skizze der Funktionen mit Ihren Ergebnissen an

Lösung:




$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$


$h(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

c) Eine Ursprungsgerade verläuft durch den Punkt $\left(-2 \mid f(-2)\right)$.

(i) Bestimmen Sie die Geradengleichung.

(ii) In welchem Punkt schneidet die gesuchte Gerade die Funktion f(x) zum zweiten Mal?

<u>Lösung:</u>

$$f(x)=\frac{3(x-4)}{2(x-1)} \quad \Rightarrow \quad f(-2)=\frac{3(-2-4)}{2(-2-1)}=3$$

$$\Rightarrow \quad \mathit{Geradengleichung}: \quad g(x)=-\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad \mathit{weiterer\ Schnittpunkt}: \quad f(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{3(x-4)}{2(x-1)}=-\frac{3}{2}x$$

$$\xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}(x-1)} \quad x-4=-x^2+x \quad \xrightarrow{-x} \quad 4=x^2 \quad \Rightarrow \quad x_2=2 \quad \Rightarrow \quad g(2)=-3$$

$$\Rightarrow \quad S_2\left(2 \mid -3\right)$$

8.) Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

Gegeben ist die Funktion $f_t(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2tx+3t} \quad \mathit{mit} \ \ t\in\Re\setminus\{0\}$

Für welchen Wert von **t** besitzt die Funktion

(i) keine Polstelle?

(ii) eine Polstelle?

(iii) zwei Polstellen?

<u>Lösung:</u>

$$x^2-2tx+3t=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=t\pm\sqrt{t^2-3t} \quad \Rightarrow \quad t(t-3)=0 \quad \Rightarrow \quad t_1=0 \quad \wedge \quad t_2=3$$

$\mathit{eine\ Polstelle}: \quad t_2=3$ da t = 0 nicht definiert ist!

$$\mathit{keine\ Polstelle}: \quad t^2-3t<0 \quad \Rightarrow \quad t(t-3)<0 \quad \Rightarrow \quad \left]\,0\,;3\,\right[$$

$$\mathit{zwei\ Polstellen}: \quad t^2-3t>0 \quad \Rightarrow \quad t(t-3)>0 \quad \Rightarrow \quad t\in\Re\setminus\left[\,0\,;3\,\right]$$