Musterlösung **11. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 20.02.2008**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Geometrische Folgen und Reihen; Finanzmathematik (Zinsen und Renten)

1.) Geometrische Folge I

Berechnen Sie die ersten 5 Glieder einer geometrischen Folge, von der folgende Größen bekannt sind:

$a_1 = 4$ und $q = 1{,}5$

Geben Sie auch das Bildungsgesetz an.

Lösung: $a_n = 4 \cdot 1{,}5^{n-1} \quad \Rightarrow$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
4	6	9	13,5	20,25

2.) Geometrische Folge II

Von einer geometrischen Folge f mit f(1) = 5 und f(7) = 3.645 ist die Summe der ersten 6 Glieder (– 910).

a) Ermitteln Sie den Wert für q und geben Sie das Bildungsgesetz an.

b) Erklären Sie, warum eine negative Summe entsteht?

Lösung: $3.645 = 5 \cdot q^{7-1} \quad \Rightarrow \quad q = 3$

Da es sich um eine alternierende Folge handelt (= Elemente mit Vorzeichenwechsel) muss q = - 3 gelten. Daher kann die Summe je nach letztem Glied auch negativ werden.

3.) Ein Jäger, der mit seinem Hund unterwegs ist, befindet sich noch 600 m von seinem Haus entfernt. Der Hund rennt zum Haus, kehrt um bis er wieder den Jäger trifft. Dies wiederholt er mehrere Male bis auch der Jäger am Haus ist. Der Hund läuft dabei dreimal so schnell wie der Jäger

a) Ermitteln Sie die ersten 6 Wegstücke, die der Hund zurücklegt.

b) Welche Gesamtstrecke legt der Hund zurück?

Lösung:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
600	300	300	150	150	75

Wegen der dreifachen Geschwindigkeit des Hundes wird er die dreifache Strecke des Jägers zurücklegen => 1.800 m.

4.) Gegeben ist die Zahlenfolge: $\frac{3}{2}\;;\;\frac{3}{4}\;;\;\frac{3}{8}\;;\;\frac{3}{16}\;;\ldots$

a) Zeigen Sie, dass diese Darstellung eine geometrische Folge ist.

Lösung:

$$q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}} \Rightarrow q = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{3}{16}\cdot\frac{8}{3} = \frac{1}{2}$$

b) Geben Sie ein Bildungsgesetz an.

Lösung: $$a_n = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2^n}$$

c) Wie lautet das 10. Glied der Folge?

Lösung: $$a_{10} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{3}{2^{10}} = \frac{3}{1.024}$$

d) Vom wievielten Folgenglied ab sind die Werte der Folge a_n kleiner als $10^{-6} = \frac{1}{1.000.000}$?

Lösung:

$$\frac{3}{2^n} < \frac{1}{1.000.000} \Rightarrow 3.000.000 < 2^n \Rightarrow \frac{\ln(3.000.000)}{\ln 2} < n$$

$$n > 21{,}516 \Rightarrow n \geq 22$$

5.) Drei Zahlen bilden eine geometrische Folge mit der Summe 38.

Die mittlere Zahl ist 12. Wie lauten die beiden anderen Zahlen?

Lösung:

$$Ansatz: \quad \frac{12}{q} + 12 + 12q = 38 \xrightarrow{\cdot q} 12 + 12q + 12q^2 = 38q$$

$$\Rightarrow \quad 12q^2 - 26q + 12 = 0$$

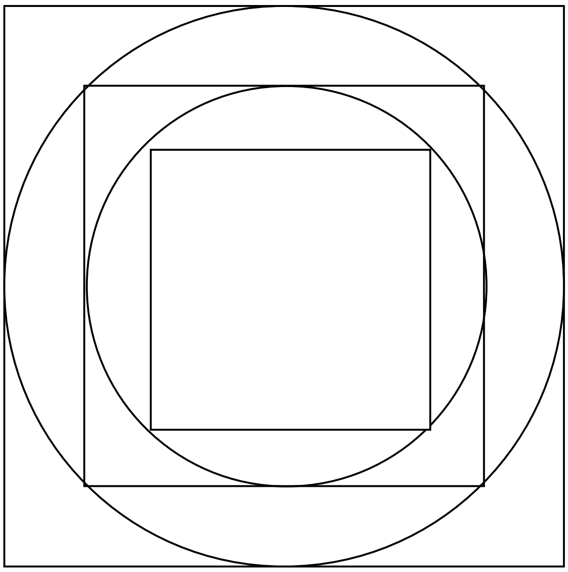
$$\Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{26 \pm \sqrt{676-576}}{24} = \frac{26 \pm 10}{24} \Rightarrow q_1 = 1{,}5 \wedge q_2 = \frac{2}{3}$$

Folge 1: 8 ; 12 ; 18 Folge 2: 18 ; 12 ; 8

6.) In ein Quadrat mit der Seitenlänge 20 cm wird der Inkreis gezeichnet; in diesen wieder ein Quadrat usw., so dass jeweils 10 Quadrate und Kreise entsthen.

a) Fertigen Sie eine Skizze mit den ersten drei Quadraten und Inkreisen an.

Lösung:



b) Berechnen Sie die Flächen der ersten drei Quadrate.

Lösung:

Quadrat 1: $A_1 = 20 \cdot 20 = 400$

Quadrat 2: $A_2 = \sqrt{200} \cdot \sqrt{200} = 200$

Quadrat 3:

$$A_3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{200} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{200} = 100 \quad (4\ Dreiecke)$$

$$A_3 = \sqrt{100} \cdot \sqrt{100} = 100 \quad (Pythagoras)$$

c) Wie groß ist die Summe der Flächen der ersten 10 Qudrate?

Lösung:

$$s_{10} = 400 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 400 \cdot 1,998 = 799,22$$

d) Stellen Sie ein Bildungsgesetz für die Fläche des n-ten Quadrates dar.

Lösung:

$$a_n = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

e) Wie groß ist die Flächensumme aller Quadrate für $n \to \infty$

Lösung:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{i} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{400}{\frac{1}{2}} = 800$$

7.) Der sparwütige Willy Zinsreich zahlt jährlich <u>**nachschüssig**</u> 6 Jahre lang 5.000,00 € auf ein Konto ein. Nach diesen 6 Jahren erhöht er den Betrag auf 8.000,00 € und zahlt diesen nun 4 Jahre ein. Der Zinssatz beträgt dauerhaft 4,5 %.

Wie hoch ist der Betrag nach 15 Jahren, wenn in den letzten 5 Jahren keine weiteren Einzahlungen mehr erfolgen?

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} K_6 &= 5.000,00 \cdot \frac{1,045^6 - 1}{0,045} = 33.584,46 \\ K_{15\,I} &= 33.584,46 \cdot 1,045^9 = 49.909,70 \\ K_4 &= 8.000,00 \cdot \frac{1,045^4 - 1}{0,045} = 34.225,53 \\ K_{15\,II} &= 34.225,53 \cdot 1,045^5 = 42.651,24 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} K_{ges} &= K_{15\,I} + K_{15\,II} \\ K_{ges} &= 92.560,94 \end{aligned}$$

8.) Familie Knödel legt beim Eintritt ihres Kindes in die 5. Klasse ein Kapital von 20.000,00 € zum Zinssatz von 6,5 % p.a. an, um das eventuelle Studium zu finanzieren.

a) Auf welchen Betrag ist das Kapital angewachsen, wenn man davon ausgeht, dass das Kind bis zum Abitur nach 13 Schuljahren keine Klasse wiederholt hat und das Studium 5 Jahre nach dem Abitur aufnimmt?

Lösung: $K_{14} = 20.000,00 \cdot 1,065^{14} = 48.297,48$

Das Studium ist auf 8 Semester ausgelegt. Der Zinssatz des angesparten Geldes wird jetzt aber auf 5 % reduziert.

b) Wie viel Geld kann Kunigunde Knödel jeweils am Jahresanfang abheben, damit das Kapital zum Ende des Studium gerade aufgebraucht sein wird?

Lösung:

vorschüssige Rentenzahlung

$$48.297,48 \cdot 1,05^4 = r \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^4 - 1}{0,05}$$

$$\Rightarrow r = \frac{48.297,48 \cdot 1,05^3 \cdot 0,05}{1,05^4 - 1} = 12.971,87$$

9.) a) Zu welchem Zinssatz war ein Kapital von 5.000,00 € ausgeliehen, wenn es in 6,5 Jahren auf 6.826,52 € angewachsen ist und ein monatlicher Zinsrhythmus besteht?

Lösung:

$$6.826,52 = 5.000,00 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)^{6,5 \cdot 12}$$

$$\Rightarrow p = \left(\sqrt[78]{\frac{6.826,52}{5.000,00}} - 1\right) \cdot 1.200 = 4,8\,[\%]$$

b) Welcher einmalige Betrag muss heute eingezahlt werden, um bei einem Zinssatz von 3,5 % in 6 Jahren 2.500,00 € angespart zu haben?

Lösung:

$$2.500,00 = K_0 \cdot 1,035^6 \Rightarrow K_0 = \frac{2.500,00}{1,035^6} = 2.033,75$$

c) In wie vielen Jahre wächst ein Kapital von 6.164,59 € bei einem Zinssatz 5,5 % auf 8.500,00 € an?

Lösung:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{8.500,00}{6.164,59}\right)}{\ln 1,055} = 6\,[Jahre]$$

10.) Die Angestellte Susi Sorglos möchte ihre Lebensversicherung in Höhe von 360.000,00 € - auszahlbar mit Vollendung des 65. Lebensjahres – in eine **vorschüssige** Rente umwandeln.

a) Wie hoch ist die jährliche Rente, wenn sie 10 Jahre gezahlt werden soll und ein Zinssatz von 5 % zu Grunde gelegt wird?

Lösung:

vorschüssige Rentenzahlung

$$360.000,00 \cdot 1,05^{10} = r \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{0,05}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{360.000,00 \cdot 1,05^{9} \cdot 0,05}{1,05^{10} - 1} = 44.401,57$$

b) Wie lange könnte die Rente gezahlt werden, wenn jährlich 18.000,00 € ausgezahlt würden und nun ein Zinssatz von 4 % vereinbart wurde?

Lösung:

vorschüssige Rentenzahlung

$$360.000,00 \cdot 1,04^{n} = 18.000,00 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^{n} - 1}{0,04}$$

$$360.000,00 \cdot 1,04^{n} = 468.000,00 \cdot 1,04^{n} - 468.000,00$$

$$108.000,00 \cdot 1,04^{n} = 468.000,00$$

$$1,04^{n} = \frac{13}{3} \Rightarrow n = \frac{\ln\frac{13}{3}}{\ln 1,04} = 37,4\,[Jahre]$$