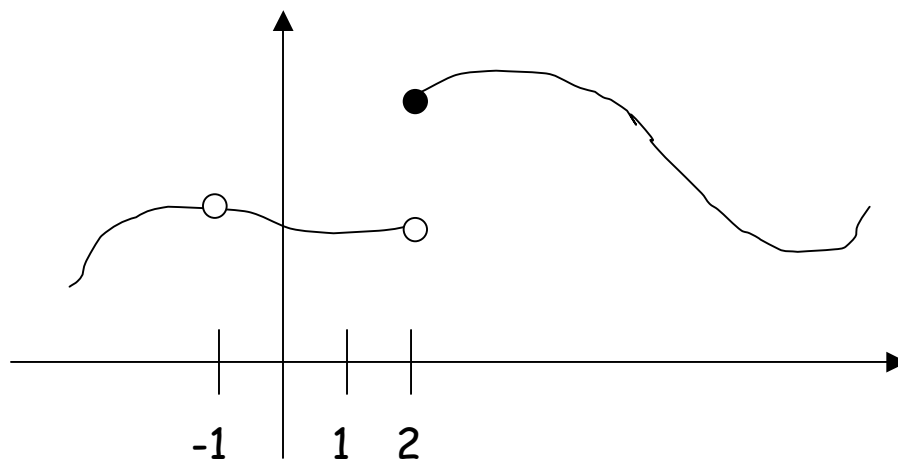
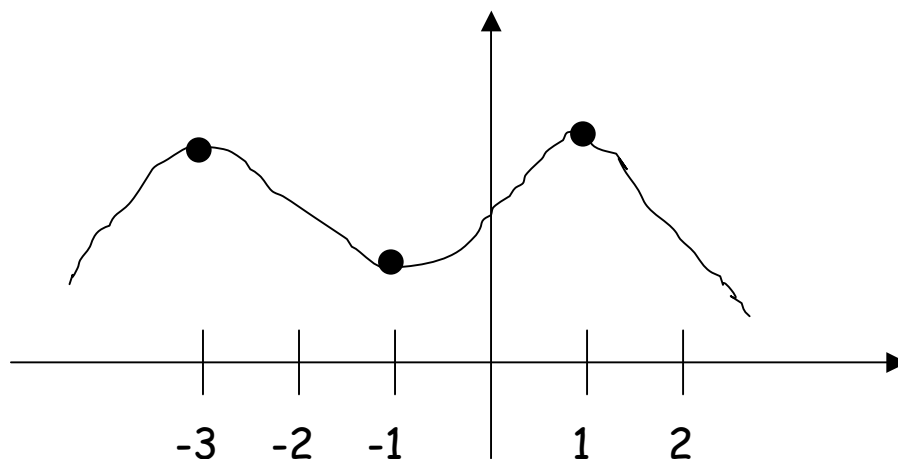

1.) Zeichnen von Funktionen

Zeichnen Sie eine Funktion, ...

- a) ... die an der Stelle $x = 2$ eine Sprungstelle und an der Stelle $x = -1$ eine Lücke besitzt.



- b) ... die an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$ je einen Hochpunkt und an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt besitzt.

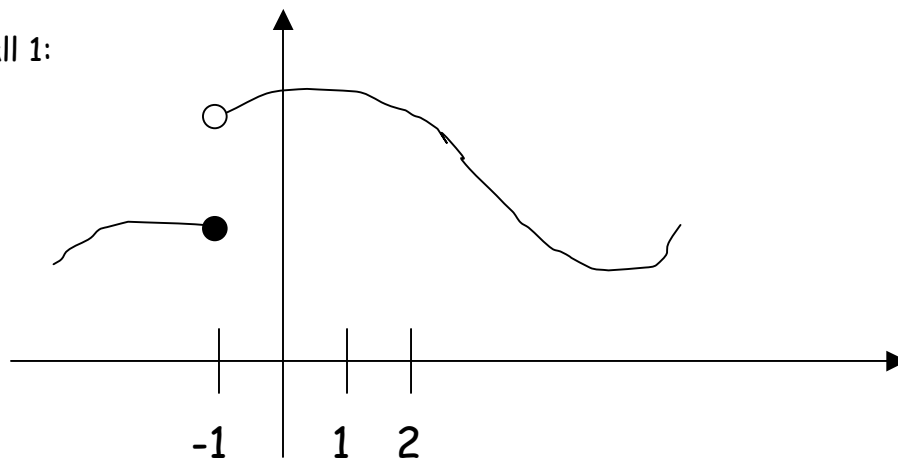


- c) ... die in $x = 2$ unstetig ist, weil der links- und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen.

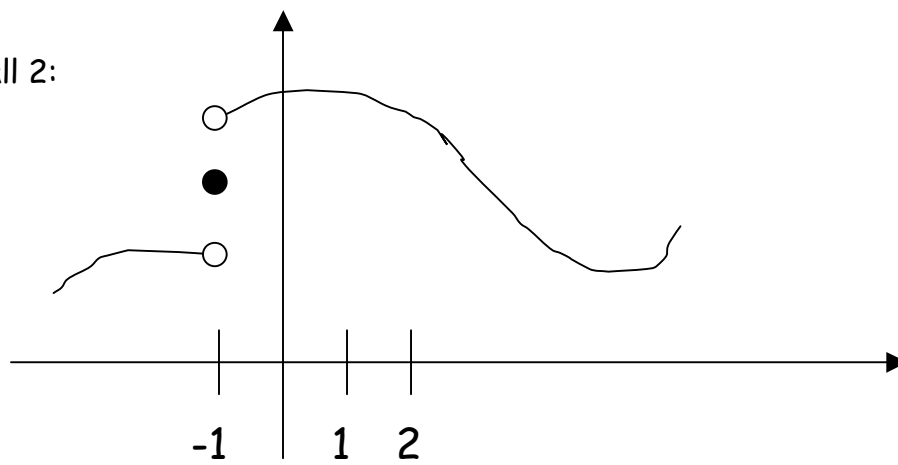
Vgl. Fall 1 und Fall 2 in Lösung zu d)

d) ... die in $x = -1$ unstetig ist, weil gilt: $f(x) \neq \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$

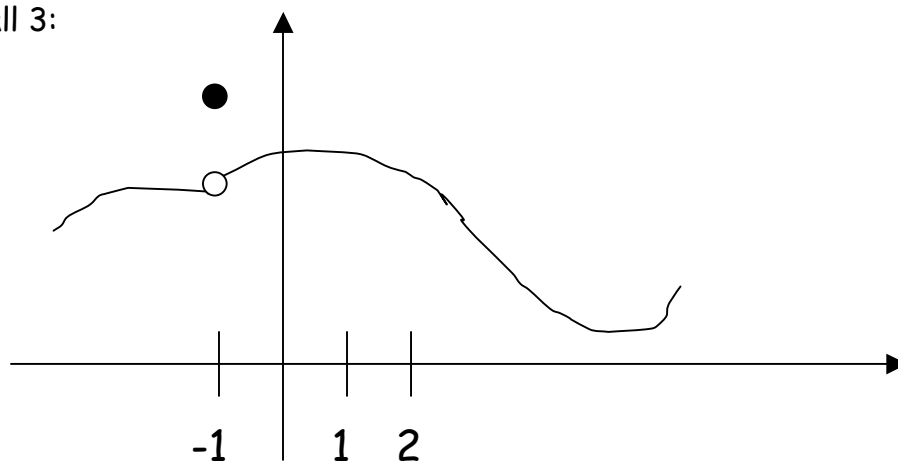
Fall 1:



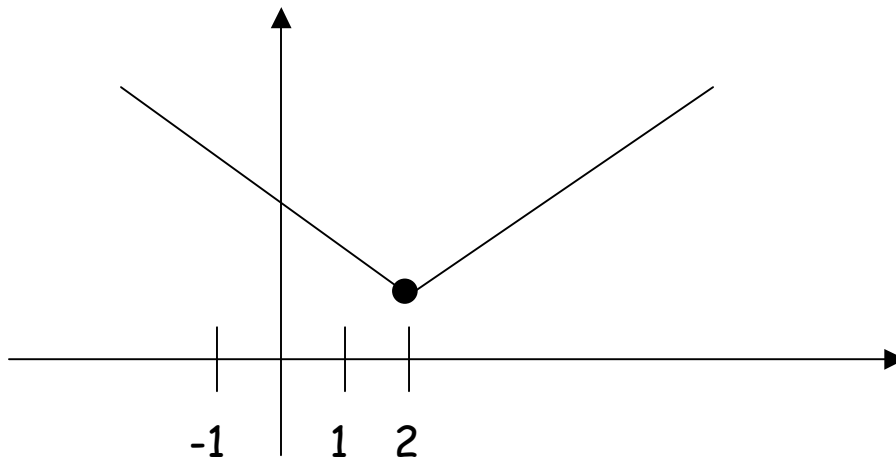
Fall 2:



Fall 3:



e) ... die in $x = 2$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.



2.) Kurvendiskussion

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x(-x^2 + 6x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad -x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = 3 \quad (\text{doppelte NS})$$

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 \qquad f''(x) = -6x + 12$$

$$f'''(x) = -6$$

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von $f(x)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 108}}{-6} = \frac{-12 \pm 6}{-6}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 3$$

$$\Rightarrow f''(1) = (-6) \cdot 1 + 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min}(1 \mid -4)$$

$$\Rightarrow f''(3) = (-6) \cdot 3 + 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max}(3 \mid 0)$$

d) Legen Sie die Monotonieintervalle fest.

$$I_1 =]-\infty; 1[\quad \text{streng monoton fallend}$$

$$I_2 =]1; 3[\quad \text{streng monoton steigend}$$

$$I_3 =]3; \infty[\quad \text{streng monoton fallend}$$

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 2$.

$$f(2) = -2 \quad f'(2) = 3 = m$$

$$\text{y-Achsenabschnitt: } (-2) = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -8$$

$$\text{Tangentengleichung: } t(x) = 3x - 8$$

f) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Wendepunkte.

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow W(2 \mid -2)$$

g) Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) \rightarrow \infty$$

3.) Aussagen zu Funktionen

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

- ☒ Wenn eine Funktion an einer Stelle unstetig ist, dann ist sie an dieser Stelle auch nicht differenzierbar.
- ☐ Eine Funktion kann nie einen Wendepunkt besitzen, wenn gilt:
$$f'(x) = 0$$
- ☒ Wenn eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist, dann ist sie an dieser Stelle auch stetig.
- ☒ Eine Funktion besitzt immer einen Wendepunkt, wenn gilt:
$$f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) > 0$$
- ☐ Wenn eine Funktion an einer Stelle stetig ist, dann ist sie an dieser Stelle auch differenzierbar.
- ☒ Wenn eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar ist, dann kann sie an dieser Stelle unstetig sein.
- ☐ Wenn eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar ist, dann muss sie an dieser Stelle unstetig sein.
- ☐ Wenn für eine Funktion gilt $f'(x) = 0$, dann hat die Funktion immer einen Hoch- oder Tiefpunkt.

4.) Ableitungen mittels Potenzregel

Bilden Sie die erste Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$

Lösung: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 4$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2} = x - \frac{2}{x} = x - 2x^{-1}$$

Lösung: $f'(x) = 1 + 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2}$

$$c) \quad f_k(x) = 2x^k - x^{k-1}$$

Lösung: $f'_k(x) = 2kx^{k-1} - (k-1)x^{k-2}$

$$d) \quad f(x) = \frac{2}{x^3}$$

Lösung: $f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \quad f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

$$e) \quad f(x) = (3x^2 - 2)^2$$

Lösung:

$$f(x) = (3x^2 - 2)^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4 \quad f'(x) = 36x^3 - 24x$$

5.) Ergänzen Sie durch sinnvolle Einträge

Gegeben ist die auf einem Intervall I definierte Funktion f und $x_0 \in I$.

Unter der Ableitung $f'(x)$ versteht man den Grenzwert des

_____.

Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f _____ auf I.

Eine ganzrationale Funktion n-ten-Grades hat maximal _____ Wendestellen.

Die Potenzregel der Differentiation lautet: _____

Die **notwendige** Bedingung für (innere) Extremstellen lautet: _____

Gilt $f'(x) = 0$, dann hat der Graph von f im Punkt $P(x \mid f(x))$ eine

_____ Tangente.

Einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente nennt man _____.

Ändert der Graph einer Funktion in einem Punkt sein Krümmungsverhalten, so nennt man diesen Punkt _____.

Lösung:

Unter der Ableitung $f'(x_0)$ versteht man den Grenzwert des Differenzenquotienten.

Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng monoton steigend auf I

Eine ganzrationale Funktion n -ten-Grades hat maximal $n-2$ Wendestellen.

Die Potenzregel der Differentiation lautet: $f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$

Die notwendige Bedingung für (innere) Extremstellen lautet: $f'(x) = 0$

Gilt $f'(x_0) = 0$, dann hat der Graph von f im Punkt $P(x_0 / f(x_0))$ eine waagrechte / horizontale Tangente.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente nennt man Terrassenpunkt / Sattelpunkt.

Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt $f''(x) = 0$.

Ändert der Graph einer Funktion in einem Punkt sein Krümmungsverhalten, so nennt man diesen Punkt Wendepunkt.

6.) Nachweis der Stetigkeit

Gegeben sei folgende abschnittsweise definierte Funktion:

$$f_k(x) = \begin{cases} 2x^2 + k & \text{für } x \leq 1 \\ -kx + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für welchen Wert von $k \in \mathbb{R}$ ist $f_k(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ stetig?

Lösung:

$$\text{linke Seite: } \lim_{\substack{x \rightarrow 1-h \\ h \rightarrow 0}} f_k(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1-h \\ h \rightarrow 0}} (2x^2 + k) = \lim_{h \rightarrow 0} [2(1-h)^2 + k] = 2 + k$$

$$\text{rechte Seite: } \lim_{\substack{x \rightarrow 1+h \\ h \rightarrow 0}} f_k(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1+h \\ h \rightarrow 0}} (-kx + 1) = \lim_{h \rightarrow 0} [-k(1+h) + 1] = -k + 1$$

$$\Rightarrow 2 + k = -k + 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

7.) Beweis

Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein:

Gegeben sei $f(x) = c \cdot a^x$

Dann gilt:
$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

Lösung:

Behauptung:
$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h \quad \text{mit} \quad f(x) = c \cdot a^x$$

Beweis:
$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{c \cdot a^{x+h}}{c \cdot a^x} = \frac{c \cdot a^x \cdot a^h}{c \cdot a^x} = a^h$$

8.) Funktionsvorschrift und Ableitungen

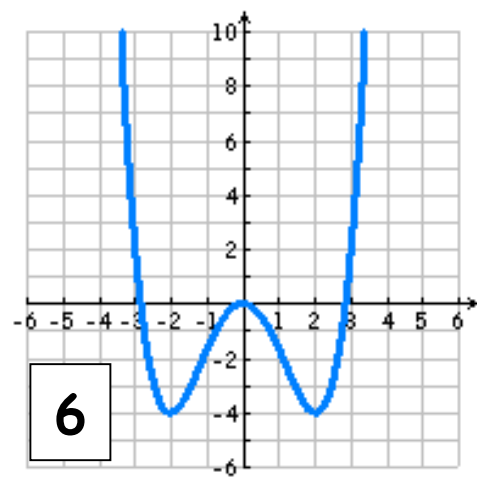
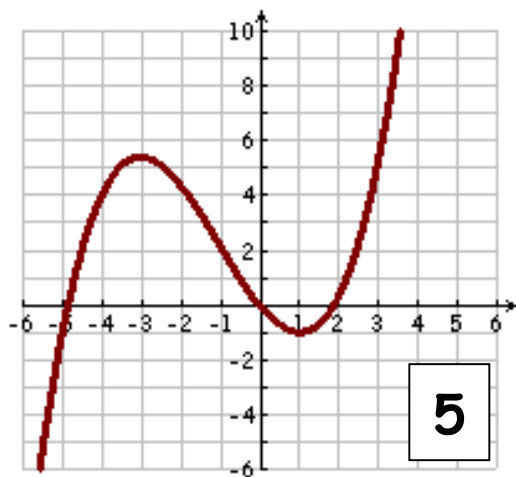
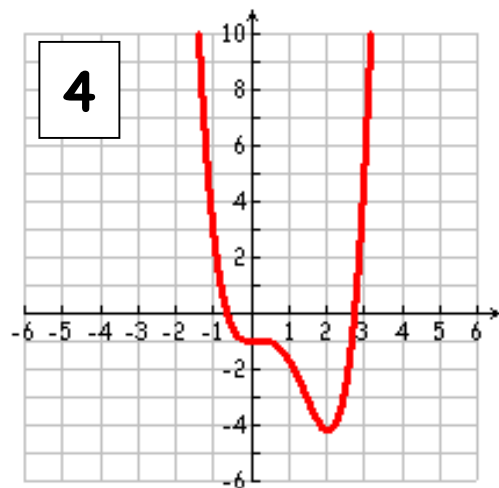
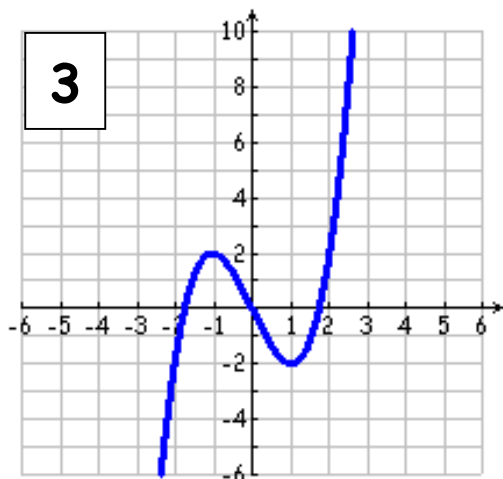
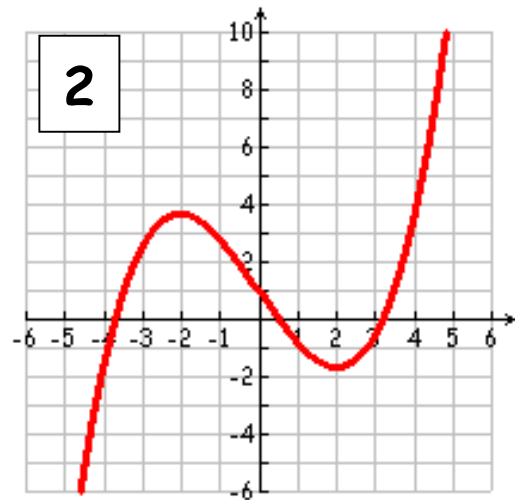
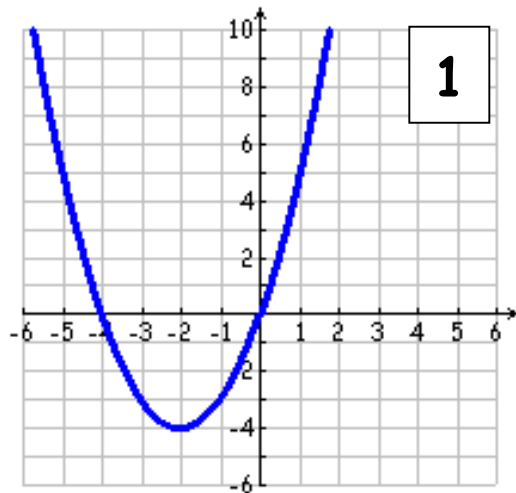
Vervollständigen Sie die Tabelle

Nr.	Funktion	1. Ableitung	2. Ableitung
1	$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	$f''(x) = 12x^2$
2	$f(x) = \frac{1}{3}x^6 + c$	$f'(x) = 2x^5$	$f''(x) = 10x^4$
3	$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + cx + d$	$f'(x) = 3x + c$	$f''(x) = 3$
4	$f(x) = \frac{1}{36}x^4 + cx + d$	$f'(x) = \frac{1}{9}x^3 + c$	$f''(x) = \frac{1}{3}x^2$

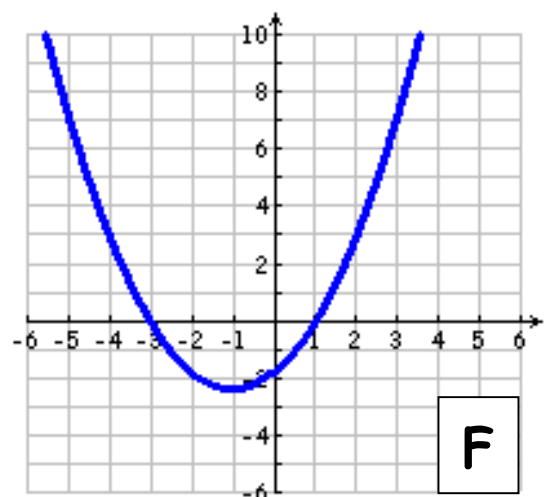
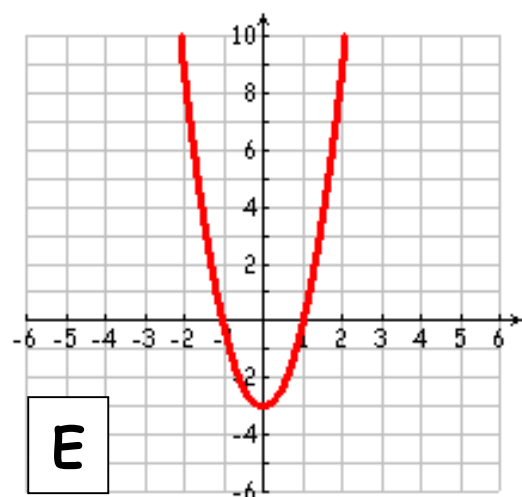
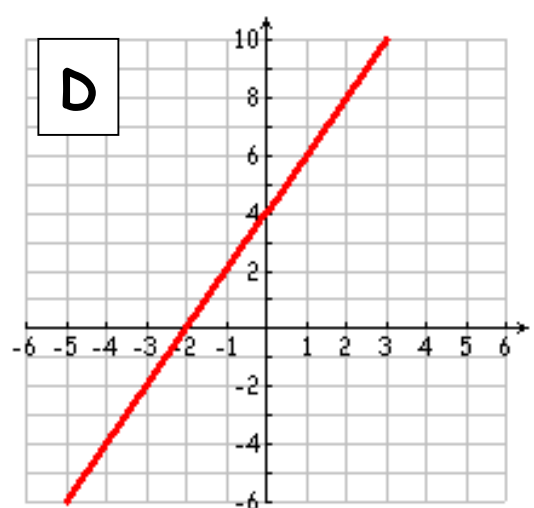
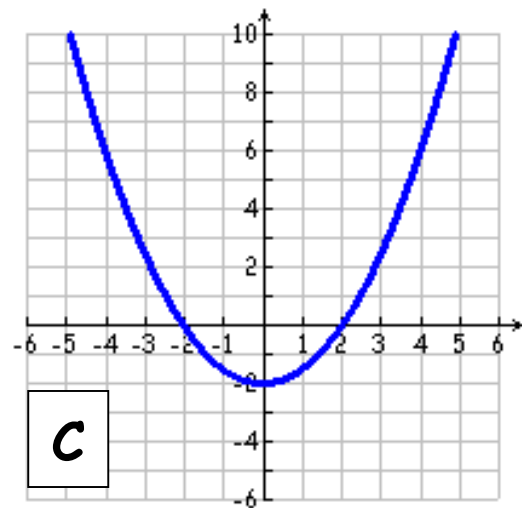
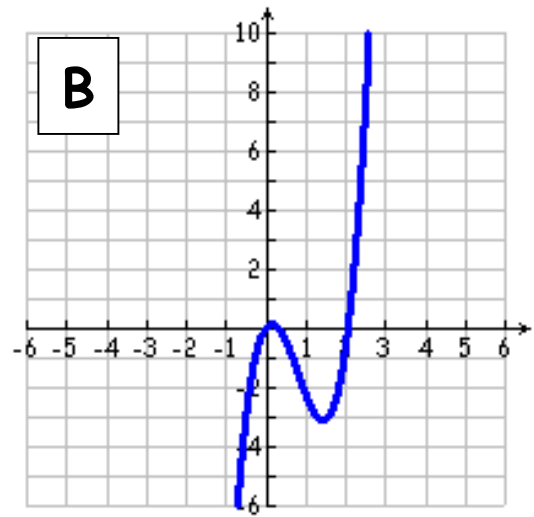
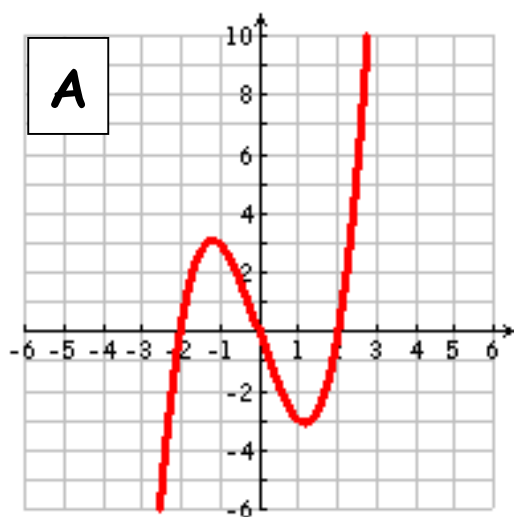
9.) Zuordnung

Ordnen Sie die Funktionsgraphen ihren Ableitungsgraphen.

Funktionsgraphen



Ableitungsgraphen



Funktionsgraph	1	2	3	4	5	6
Ableitungsgraph	D	C	E	B	F	A