Musterlösung **11. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 18.03.2009**

Klasse: GY GS 08 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit & Differenzierbarkeit; Pascalsches Dreieck und Distributivgesetz

---

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die drei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften: Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y

a) $$g(x)=\frac{2x-2}{4x^2-16}$$

Lösung:

$$Zähler: \quad 2x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad 4x^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_2=2 \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$Lücke: \quad keine \qquad S_y(0 \mid 0{,}125)$$

$$Asymptote: Zählergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=0$$

b) $$f(x) = \frac{3x-6}{(x+1)(x-4)}$$

Lösung:

$$Zähler: \quad 3x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad (x+1)(x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1 \quad und \quad x_2=4 \quad [Pole\ mit\ VZW]$$

$$keine\ Lücke \qquad S_y(0 \mid 1{,}5)$$

$$Asymptote: Zählergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=0$$

c) $$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

Lösung:

$$Zähler: \quad x^2-5x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad und \quad x_2=3 \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad und \quad x_2=-2 \quad [Pol\ ohne\ VZW]$$

$$Lücke: \quad x=2 \qquad S_y(0 \mid -1{,}5)$$

$$Asymptote: Zählergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=1$$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4tx + 3t}$ $\quad mit \;\; t \in \Re \setminus \{0\}$

Für welchen Wert von **t** besitzt die Funktion genau eine Polstelle?

Anmerkung: Denken Sie an die Diskriminante!

Lösung: Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (4t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3t = 16t^2 - 12t$$

$$=> \text{eine Lösung}: \; 16t^2 - 12t = 0 \Rightarrow 4t(4t-3) = 0$$

$$\Rightarrow 4t = 0 \;\; und \;\; 4t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0\,[nicht\ definiert!] \;\; und \;\; t = \frac{3}{4}$$

3.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an,
deren Graph folgende Eigenschaften besitzt.

a) Pol an der Stelle x = 3, Nullstelle bei x = - 1 und eine Asymptote mit a(x) = - 2.

Lösung: $f(x) = \dfrac{-2(x+1)}{x-3}$

b) Pol an der Stelle x = - 2 und eine einfache Nullstelle bei x = 1.

Lösung: $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

c) Pol an der Stelle x = - 4, behebbare Lücke bei x = 3, eine dreifache Nullstelle bei x = 5, Asymptote a(x) = 2,5
Zählergrad: n = 4

Lösung: $f(x) = \dfrac{5(x-5)^3(x-3)}{2(x+4)^3(x-3)}$

4.) Stetigkeit

Für welchen Wert von k ist die Funktion $f_k(x)$ stetig?
Begründen Sie zudem Ihre Entscheidung:

$$f_k(x) = \begin{cases} x^2 - k^2 x & x < 3 \\ \frac{2}{3}x + 4k & x \geq 3 \end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{h \to 0^-} (3-h)^2 - k^2(3-h) \quad = \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{2}{3}(3+h) + 4k \quad \Rightarrow \quad 9 - 3k^2 \quad = \quad 2 + 4k$$

$$\Rightarrow \quad -3k^2 - 4k + 7 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1/2} \quad = \quad \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{-6} \quad = \quad \frac{4 \pm 10}{-6}$$

$$\Rightarrow \quad k_1 \quad = \quad 1 \quad und \quad k_2 \quad = \quad -\frac{7}{3}$$

5.) Differentialquotient

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) \quad = \quad 3x^2$
mit Hilfe des Differentialquotienten bzw. mit der h-Methode.

Lösung:

$$m_{\tan} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h}$$

$$m_{\tan} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{h(6x+h)}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} (6x+h) \quad = \quad 6x \quad = \quad f'(x)$$

b) Begründen Sie, warum die Ableitung einer Geraden
$f(x) \quad = \quad mx + b$ immer die Konstante m ergibt.
Welche Bedeutung hat diese Konstante für die Gerade?

Lösung:

$$m_{\tan} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h}$$

$$m_{\tan} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{mx + mh + b - mx - b}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} \quad = \quad m \quad = \quad f'(x)$$

m zeigt die Steigung der Geraden an; damit kann man auch sehen, dass f'(x) = m gilt.

6.) Ableitungen von Funktionen

Bilden Sie die erste Ableitung mit Hilfe der Regel zur Ableitung von Potenzfunktionen:

a) $$f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4$$

Lösung: $$f'(x) = 8x^3 + 15x^2$$

b) $$f(x) = \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - 3x$$

Lösung: $$f'(x) = 2x^5 + 2x^3 - 3$$

c) $$f(x) = ax^2 + bx$$

Lösung: $$f'(x) = 2ax + b$$

d) $$f(x) = x^{n+1} + \frac{1}{2n}x^n$$

Lösung: $$f'(x) = (n+1)x^n + \frac{1}{2}x^{n-1}$$

8.) Ausmultiplizieren von Klammertermen und Pascal

Rechnen Sie die Klammerterme aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) Schreiben Sie die ersten 6 Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

Das Pascalsche Dreieck - Zahlenwerte

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

b) $(x+2)^4$

Lösung:

$$(x+2)^4 = 1\cdot x^4\cdot 2^0+4\cdot x^3\cdot 2+6\cdot x^2\cdot 2^2+4\cdot x\cdot 2^3+1\cdot x^0\cdot 2^4$$

$$(x+2)^4 = x^4+8x^3+24x^2+32x+16$$

c) $\left(\frac{1}{2}x+4\right)^6$

Lösung:

$$\left(\frac{1}{2}x+4\right)^6 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^6\cdot 4^0+6\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^5\cdot 4+15\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^4\cdot 4^2$$

$$+20\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^3\cdot 4^3+15\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^2\cdot 4^4+6\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^1\cdot 4^5+1\cdot x^0\cdot 4^6$$

$$\left(\frac{1}{2}x+4\right)^6 = \frac{1}{64}x^6+\frac{3}{4}x^5+15x^4+160x^3+960x^2+3.072x+4.096$$

d) $[3x+(-5)]^5$

Lösung:

$$[3x+(-5)]^5 = 1\cdot(3x)^5\cdot(-5)^0+5\cdot(3x)^4\cdot(-5)^1+10\cdot(3x)^3\cdot(-5)^2$$

$$+10\cdot(3x)^2\cdot(-5)^3+5\cdot(3x)^1\cdot(-5)^4+1\cdot(3x)^0\cdot(-5)^5$$

$$[3x+(-5)]^5 = 243x^5-2.025x^4+6.750x^3-11.250x^2+9.375x-3.125$$

7.) Zuordnung: Frage - Antwort

Lösung:

Tragen Sie in der mittleren Spalte bei jeder Aufgabenstellung den korrekten Lösungsbuchstaben ein.
Beachten Sie: Es gibt mehr Lösungsbuchstaben als Aufgaben. Ein Lösungs-buchstabe darf mehrmals verwendet werden.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

mit maximaler Definitionsmenge D

	Lösungen
1 In D sind folgende Zahlen *nicht* enthalten:	D
2 Die Funktion f hat die Nullstelle(n) x =	B
3 Die Funktion f hat die Unendlichkeitsstelle x =	F
4 Die Funktion f hat die behebbare Definitionslücke x =	E
5 Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y =	B
6 Der Grenzwert von f(x) für x gegen 2 hat den Wert	K
7 Die Funktionswerte f(x) sind größer als 3 für alle x-Werte kleiner als -2 und größer als	J
8 Die Anzahl der Schnittpunkte zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung y = x beträgt	M

A	**1 und 2**
B	**1**
C	**0 und 2**
D	**- 2 und 2**
E	**2**
F	**- 2**
G	**28**
H	**- 1**
I	$\frac{1}{4}$ **und 1**
J	**-3,5**
K	$\frac{1}{4}$
L	**4**
M	**0**