Musterlösung **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 05.06.2009**

Klasse: GY GS 08 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen**
Symmetrie - Nullstellen – Extrema – Wendepunkte

1.) Symmetrie

a) Definieren Sie die Begriffe Achsen- und Punktsymmetrie in mathematisch korrekter Form.

Lösung: Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

b) Durch welche Eigenschaft kann man diese Symmetrien bereits in der Funktionsvorschrift erkennen?

Lösung: Achsensymmetrie: Alle Exponenten sind gerade.

Punktsymmetrie: Alle Exponenten sind ungerade.

c) Zeichnen Sie eine achsen- und eine punktsymmetrische Funktion und zeigen Sie, wie man geometrisch die jeweilige Symmetrie konstruieren kann.

Lösung: freie Zeichnung mit Achsen- und Punktspiegelung

2.) Kurvenuntersuchung I

Gegeben sei die Funktion f(x) mit der Funktionsvorschrift

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

Lösung:

(i) Nullstellen:

$$Ansatz: \; f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} = 0 \xrightarrow{Subst.} \frac{1}{32}u^2 - \frac{3}{4}u + \frac{9}{2} = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 4 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{9}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{32}} = \frac{\frac{3}{4} \pm 0}{\frac{1}{16}} \Rightarrow u = 12$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{12} \quad und \quad x_2 = -\sqrt{12}$$

(ii) Extremwerte:

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$$f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(0 \,\middle|\, \frac{9}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f''\left(\pm\sqrt{12}\right) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\pm\sqrt{12} \mid 0\right)$$

(iii) Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4}x \quad \Rightarrow \quad f'''(\pm 2) = \pm\frac{3}{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_{1/2}(\pm 2 \mid 2)$$

b) Geben Sie die Monotonieintervalle und das entsprechende Monotonieverhalten an.

<u>Lösung:</u>

Monotonieintervalle:

$\mathrm{I}_1 = \left]-\infty; -\sqrt{12}\right[$ streng monoton fallend

$\mathrm{I}_2 = \left]-\sqrt{12}; 0\right[$ streng monoton steigend

$\mathrm{I}_3 = \left]0; \sqrt{12}\right[$ streng monoton fallend

$\mathrm{I}_4 = \left]\sqrt{12}; \infty\right[$ streng monoton steigend

c) Ermitteln Sie in x = 2 und x = -2 die Tangenten der Funktion.

<u>Lösung:</u>

Tangente für x = - 2:

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \xrightarrow{x=-2} f(-2) = 2 \quad [vgl. Wendepunkt]$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \xrightarrow{x=-2} f'(-2) = 2 = m$$

$$\xrightarrow{t(x) = mx+b} 2 = 2\cdot(-2) + b \quad \Rightarrow \quad 6 = b \quad \Rightarrow \quad Tangente: \; t(x) = 2x + 6$$

Tangente für x = 2:

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \xrightarrow{x=2} f(2) = 2 \quad [vgl. Wendepunkt]$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \xrightarrow{x=2} f'(2) = -2 = m$$

$$\xrightarrow{t(x) = mx+b} 2 = (-2)\cdot 2 + b \Rightarrow 6 = b \Rightarrow Tangente: \quad t(x) = -2x + 6$$

d) Die beiden Tangenten bilden mit der x-Achse ein Dreieck. Berechnen Sie dessen Fläche.

Lösung:

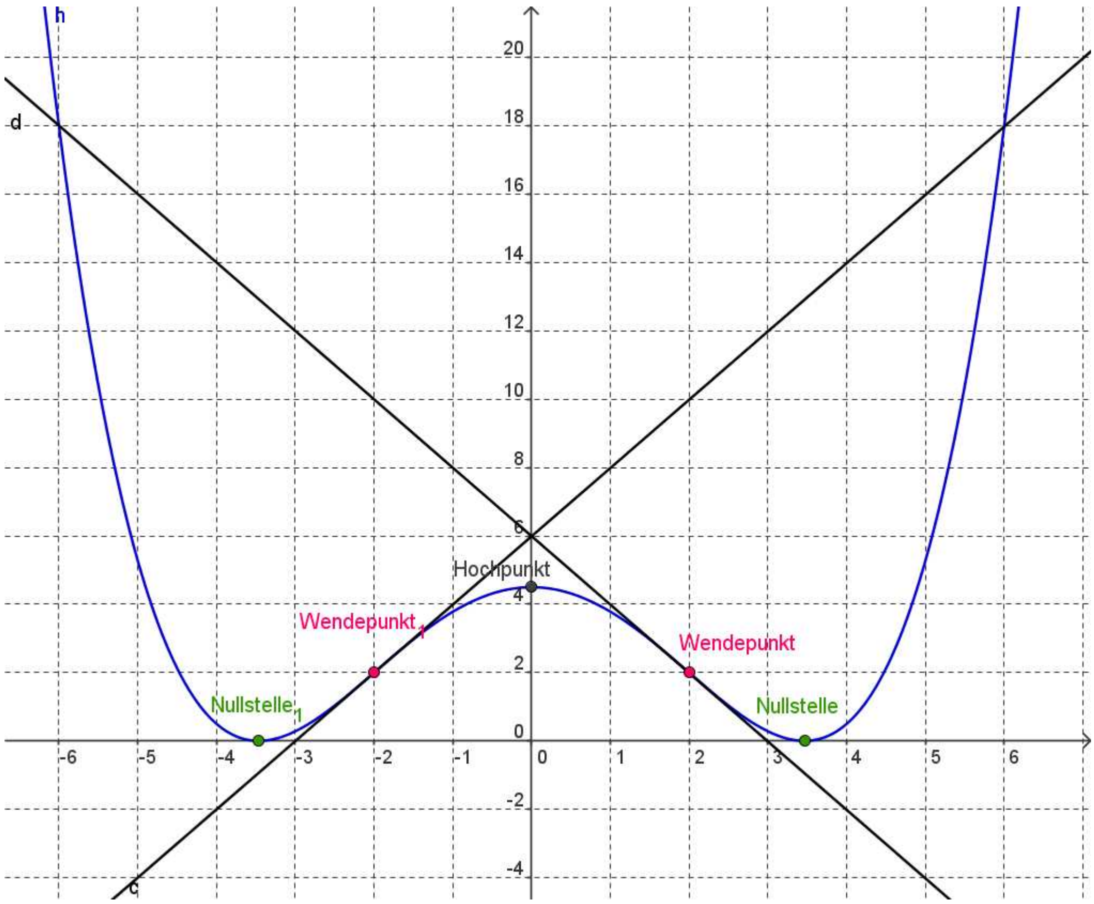
$$Schnittpunkt\ zwischen\ den\ Tangenten: \quad S(0 \mid 6) \Rightarrow Höhe: 6\,[cm]$$

$$Grundlinie: \quad Intervall\ [-3;3] \Rightarrow 6\,[cm]$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18$$

e) Gegen welche Werte strebt die Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$?

Lösung:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}\right) \rightarrow \infty$$



3.) Kurvenuntersuchung II

Gegeben sei die Funktion g(x) mit der Funktionsvorschrift

$$g_k(x) \quad = \quad \frac{1}{8}x^4 - x^3 + kx^2 \quad mit \quad k \in \Re$$

a) Wie lauten für **k = 2** die Extremwerte und Wendepunkte?

Lösung:

(i) Extremwerte:

$$g_2(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad g_2'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} \quad = \quad \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \quad = \quad 3 \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x_2 \quad = \quad 2 \quad und \quad x_3 \quad = \quad 4$$

$$g_2''(x) \quad = \quad \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$$

$$\Rightarrow \quad g_2''(0) \quad = \quad 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad g_2''(2) \quad = \quad -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(2 \mid 2)$$

$$\Rightarrow \quad g_2''(4) \quad = \quad 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(4 \mid 0)$$

(ii) Wendepunkte:

$$g_2''(x) \quad = \quad \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} \quad = \quad \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4}}{2 \cdot \frac{3}{2}} \quad = \quad \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 3{,}15 \quad und \quad x_2 \quad = \quad 0{,}85$$

$$g_2'''(x) \quad = \quad 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(3{,}15) \quad \neq \quad 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(3{,}15 \mid 0{,}89)$$

$$g_2'''(x) \quad = \quad 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(0{,}85) \quad \neq \quad 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(0{,}85 \mid 0{,}89)$$

b) Ab welchem Wert für k hat die Funktion nur noch einen Tiefpunkt?

Lösung:

$$g_k'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2kx = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = 3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2k} = 3 \pm \sqrt{9 - 4k}$$

$$\Rightarrow 9 - 4k < 0 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion für $k > 3$ keine Wendepunkte besitzt.

Lösung:

$$g_k''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2k = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2k} = 6 \pm \sqrt{36 - 12k}$$

$$\Rightarrow 36 - 12k < 0 \Rightarrow k > 3$$

4.) Begriffe ergänzen

Gegeben ist die auf einem Intervall I definierte Funktion f und $x_0 \in I$.
Ergänzen Sie durch sinnvolle Einträge!

Unter der Ableitung $f'(x_0)$ versteht man den Grenzwert des ________________________.

Wenn $f'(x)>0$ für alle $x \in$ I, dann ist f __________________________________ auf I

Eine ganzrationale Funktion n-ten-Grades hat maximal ________________

Wendestellen.

Die Potenzregel der Differentiation lautet: ___________________________________

Die notwendige Bedingung für (innere) Extremstellen lautet: ____________________

Gilt $f'(x_0)=0$, dann hat der Graph von f im Punkt $P(x_0 / f(x_0))$ eine _________________

Tangente.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente nennt man

__________________________.

Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt ______________________________.

Ändert der Graph einer Funktion in einem Punkt sein Krümmungsverhalten, so nennt man diesen Punkt ______________________________.

Lösung:

Unter der Ableitung $f'(x_0)$ versteht man den Grenzwert des ***_Differenzenquotienten_***.

Wenn $f'(x)>0$ für alle $x \in I$, dann ist f ***_streng monoton steigend_*** auf I

Eine ganzrationale Funktion n-ten-Grades hat maximal **_n-2_** Wendestellen.

Die Potenzregel der Differentiation lautet: **_$f'(x) = n * x^{(n-1)}$ _**

Die notwendige Bedingung für (innere) Extremstellen lautet: **_ $f'(x) = 0$ _**

Gilt $f'(x_0)=0$, dann hat der Graph von f im Punkt $P(x_0 / f(x_0))$ eine **_waagrechte / horizontale_** Tangente.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente nennt man **_Terrassenpunkt / Sattelpunkt_**.

Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt **_ $f''(x) = 0$_**.

Ändert der Graph einer Funktion in einem Punkt sein Krümmungsverhalten, so nennt man diesen Punkt **_Wendepunkt_**.

5.) Anwendungsaufgabe I

Ein Gebirgsmassiv hat die in der Zeichnung angedeutete Gestalt.
Der Gipfel liegt bei G, das Plateau bei P (10/0,85).

Zu Füßen des Massivs liegt bei B (13/0) ein Dorf.

Die Zahlenangaben sind in km zu verstehen, z.B. bedeutet P (10/0,85), dass das Plateau vom Ursprung O (0/0) in waagrechter Richtung 10km entfernt auf 850m Höhe liegt.

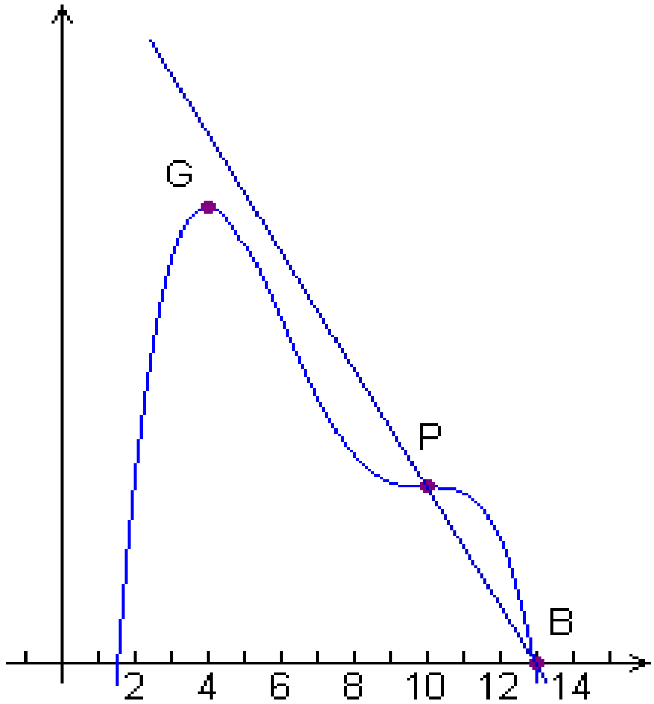
Vom Dorf B führt ein Tunnel in gerader Linie zum Plateau P;
in dem Tunnel bringt eine Zahnradbahn Touristen von B nach P und zurück.

Die Gebirgskontur wird näherungsweise durch den Graph der Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = -\frac{1}{320}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 5x - \frac{27}{5}$$

$$mit \quad x \in \Re$$

beschrieben.



a) Wie hoch ist der Gipfel?

Lösung:

$$f(4) = 2{,}2 \quad \Rightarrow \quad 2.200\,[m]$$

b) Welche Steigung hat die Gerade

$g = \overline{BP}$ absolut und in Prozent?

Lösung:

$$P(10 \mid 0{,}85) \quad und \quad B(13 \mid 0)$$

$$m_{\overline{BP}} = \frac{0-0{,}85}{13-10} = \frac{-0{,}85}{3} = \frac{-850\,[m]}{3.000\,[m]} \approx -0{,}2833 \approx (-)\,28{,}33\,[\%]$$

c) Wie lange dauert eine Bergfahrt in Minuten bei einer Durchschnitts-geschwindigkeit der Zahnradbahn von $\bar{v} = 25\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Lösung:

$$Entfernung\ \overline{BP}: \quad P(10 \mid 0{,}85) \quad und \quad B(13 \mid 0)$$

$$e_{\overline{BP}} = \sqrt{(0-0{,}85)^2 + (13-10)^2} = \sqrt{9{,}7225} \approx 3{,}118\,[km]$$

$$Zeit: \quad t = \frac{3{,}118\,[km]}{25\left[\frac{km}{h}\right]} \approx 0{,}1247\,[h] \xrightarrow{\cdot 60} 7{,}48\,[\text{min}] \approx 7\,[\text{min}]\,29\,[sek]$$

d) Ein Extrembergsteiger will die Strecke vom Plateau P auf den Gipfel G auf kürzestem Weg erklimmen.
Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion.

Erklären Sie, warum die Funktion in diesem Punkt am Berg die größte Steigung hat?

<u>Lösung:</u> *Im Wendepunkt hat die Berg die größte Steigung.*

Beweis:

$$f'(x) = -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{4}x + 5 \quad und \quad f''(x) = -\frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{4} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 6 \quad \vee \quad x_2 = 10$$

Wo ist die Steigung maximal?

Zur Lösung müssen die x-Werte in die dritte Ableitung der Funktion eingesetzt werden.

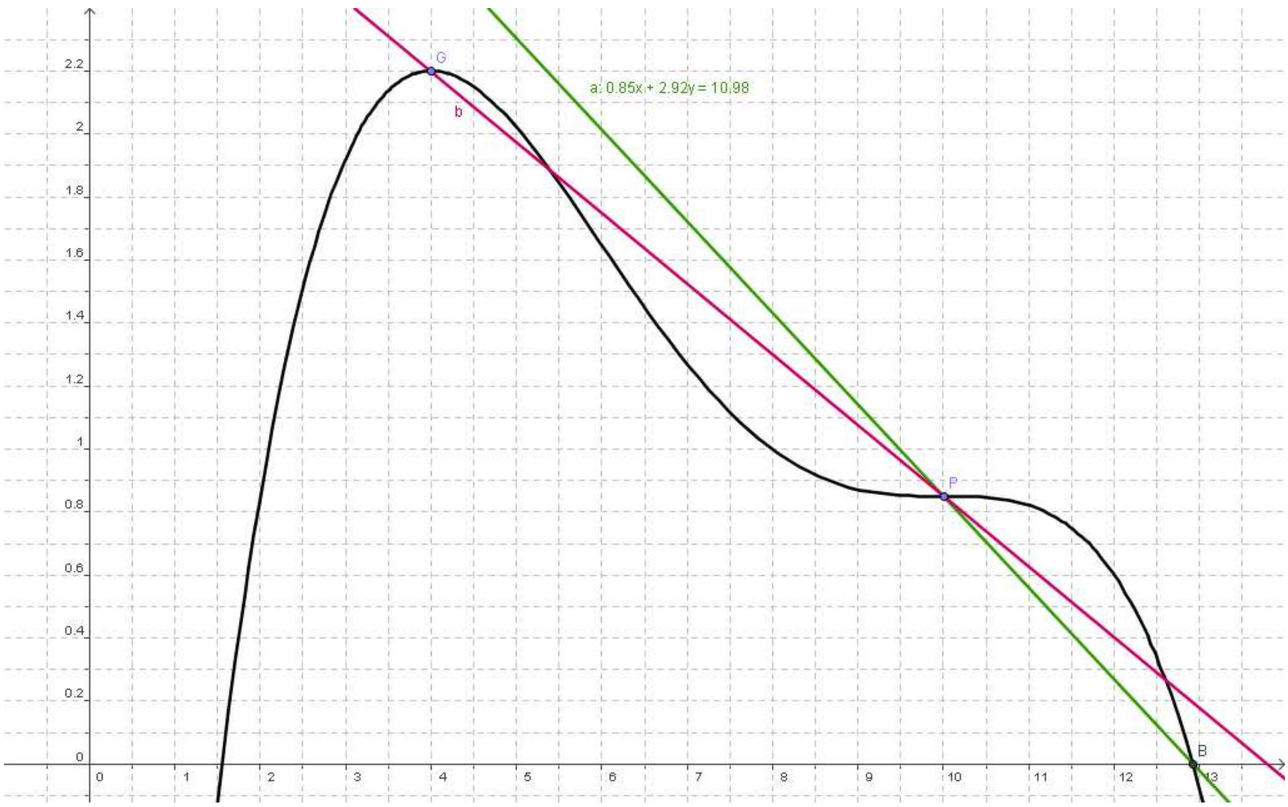
$$f'''(x) = -\frac{3}{40}x + \frac{3}{5}$$

$$f'''(6) = -\frac{3}{40} \cdot 6 + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$\Rightarrow \quad W_1(6 \mid 1{,}65) \xrightarrow[in\ f'(x)]{x=6} m_{W_1} = -0{,}4$$

$$f'''(10) = -\frac{3}{40} \cdot 10 + \frac{3}{5} = -\frac{3}{20} = -0{,}15$$

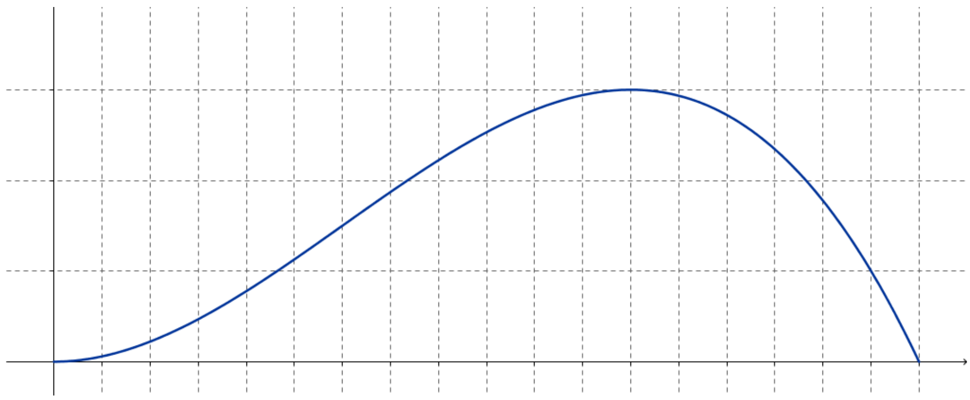
$$\Rightarrow \quad W_2(10 \mid 0{,}85) \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$



6.) Anwendungsaufgabe II

Die Flugkurve eines Balls beim einem Freistoß in einem Fußballspiel lautet:

$$f(x) \quad = \quad -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball während des Fluges?

Lösung:

$$f'(x) \quad = \quad -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x \quad = \quad x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 \quad = \quad 12 \quad \Rightarrow \quad f''(12) \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Max(12 \mid 3)$$

b) Eine Abwehrmauer mit ca. 2m großen Spielern steht genau 9,15 m vom Freistoßpunkt entfernt.

Wird der Ball über diese Spieler fliegen?

Lösung: $\quad f(9{,}15) \quad = \quad 2{,}57$

Trotz eines Durchmessers des Fußballs von ca. 35 cm wird die Höhe der Flugkurve reichen, damit der Ball über die Abwehrmauer fliegt.

c) An welcher Stelle (= Koordinaten) kommt der Ball wieder auf?

Lösung: Nullstelle der Funktion

$$Ansatz: \quad f(x) \quad = \quad -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 0\,[doppelt] \quad und \quad x_{3/4} \quad = \quad \frac{288}{16} \quad = \quad 18$$

Der Ball wird nach 18 m Flug wieder auf dem Rasen aufkommen.