Musterlösung **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 27.05.2009**

Klasse: GY GS 08 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen
Symmetrie - Nullstellen – Extrema – Wendepunkte

1.) Symmetrie

a) Definieren Sie den Begriff „Punktsymmetrie" in mathematisch korrekter Form.

Lösung: $f(-x) = -f(x)$

b) Durch welche Eigenschaft kann man eine Punktsymmetrie bereits in der Funktionsvorschrift erkennen?

Lösung: Alle Exponenten sind ungerade.

c) Welche Symmetrie liegt vor? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i) $f(x) = -4x^6 + 2x^4 + x^2 - 1$

Lösung: Achsensymmetrie, da gilt: alle Exponenten sind gerade bzw.

$$f(-x) = f(x)$$

(ii) $f(x) = -2x^7 + x^3 - 4x$

Lösung: Punktsymmetrie, da alle Exponenten ungerade sind bzw. da gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

(iii) $f(x) = x^2\left(-0,5x^4 + 3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

Lösung: $f(x) = x^2\left(-0,5x^4 + 3x^2 + x^{-2}\right) = -0,5x^6 + 3x^4 + 1$

=> Achsensymmetrie, da gilt: $f(-x) = f(x)$

(iv) $f(x) = -4x^{8(n+1)} + 3x^{2n} \quad mit \quad n \in N$

Lösung: $f(x) = -4x^{8(n+1)} + 3x^{2n} = -4x^{8n+8} + 3x^{2n}$

=> Achsensymmetrie, da gilt: $f(-x) = f(x)$

2.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie

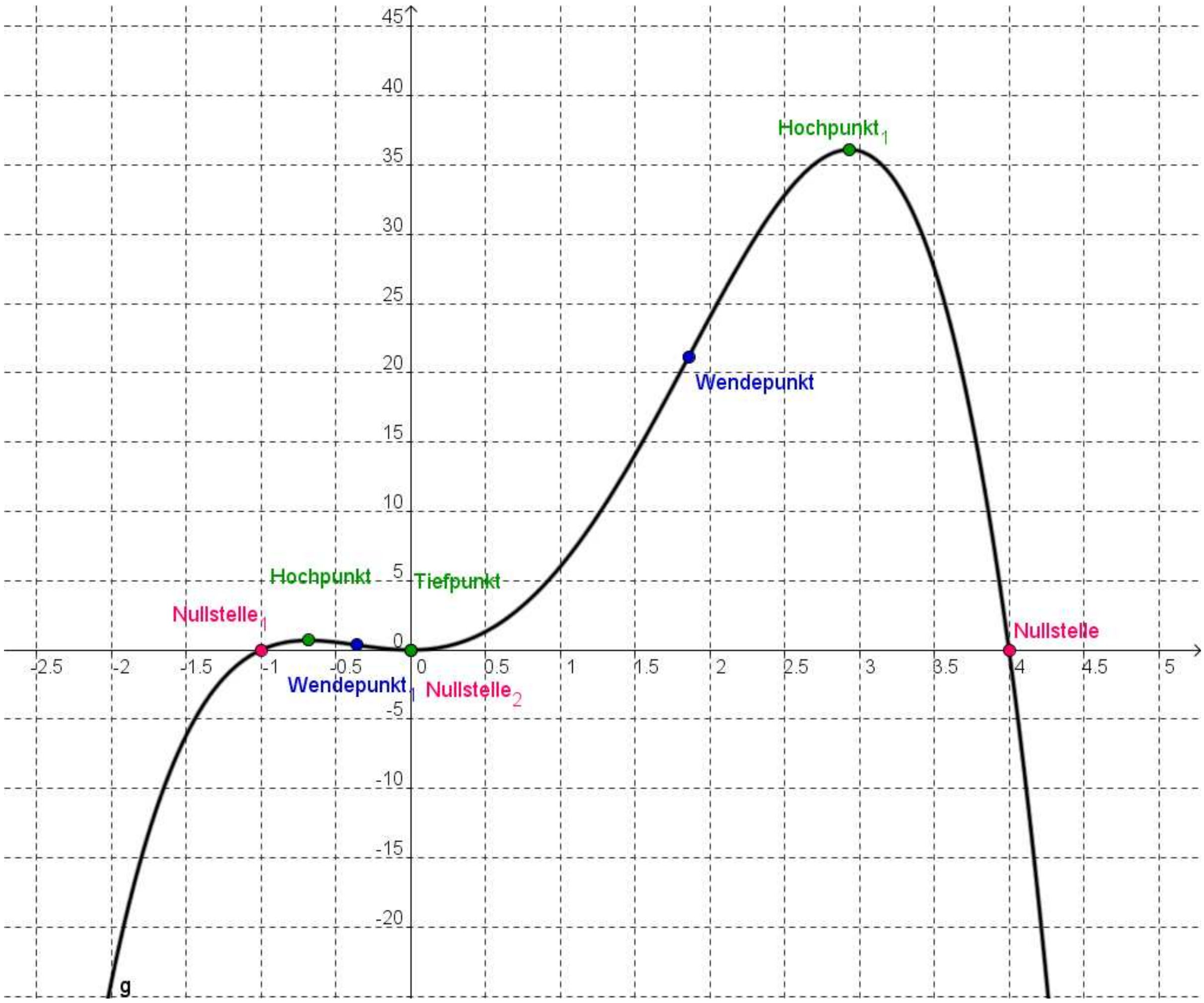
(i) die Nullstellen, (ii) die Monotonieintervalle,

(iii) die Extremwerte (iv) und die Wendepunkte

bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = -x^4 + 3x^3 + 4x^2$

Lösung:



(i)

$$Ansatz: \quad f(x) = -x^4 + 3x^3 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x^2 + 3x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0\,[doppelt] \quad und \quad x_{3/4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$$x_3 = -1 \quad und \quad x_4 = 4$$

(ii) + (iii)

$$f'(x) = -4x^3+9x^2+8x = x\left(-4x^3+9x^2+8\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=0 \quad und \quad x_{2/3} = \frac{-9\pm\sqrt{81+128}}{2\cdot(-4)} = \frac{-9\pm 14,4}{-8}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 2,93 \quad \wedge \quad x_3 = -0,68$$

$$f''(x) = -12x^2+18x+8$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = 8>0 \quad \Rightarrow \quad Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad f''(2,93) = -42,28<0 \quad \Rightarrow \quad Max(2,93 \mid 36,1)$$

$$\Rightarrow \quad f''(-0,68) = -9,79<0 \quad \Rightarrow \quad Max(-0,68 \mid 0,69)$$

Monotonieintervalle:

$\mathrm{I}_1 = \left]-\infty;-0,68\right[$ streng monoton steigend

$\mathrm{I}_2 = \left]-0,68;0\right[$ streng monoton fallend

$\mathrm{I}_3 = \left]0;2,93\right[$ streng monoton steigend

$\mathrm{I}_4 = \left]2,93;\infty\right[$ streng monoton fallend

(iv)

$$f''(x) = -12x^2+18x+8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-18\pm\sqrt{324+384}}{-24} = \frac{-18\pm 26,61}{-24}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1,86 \quad und \quad x_2 = -0,36$$

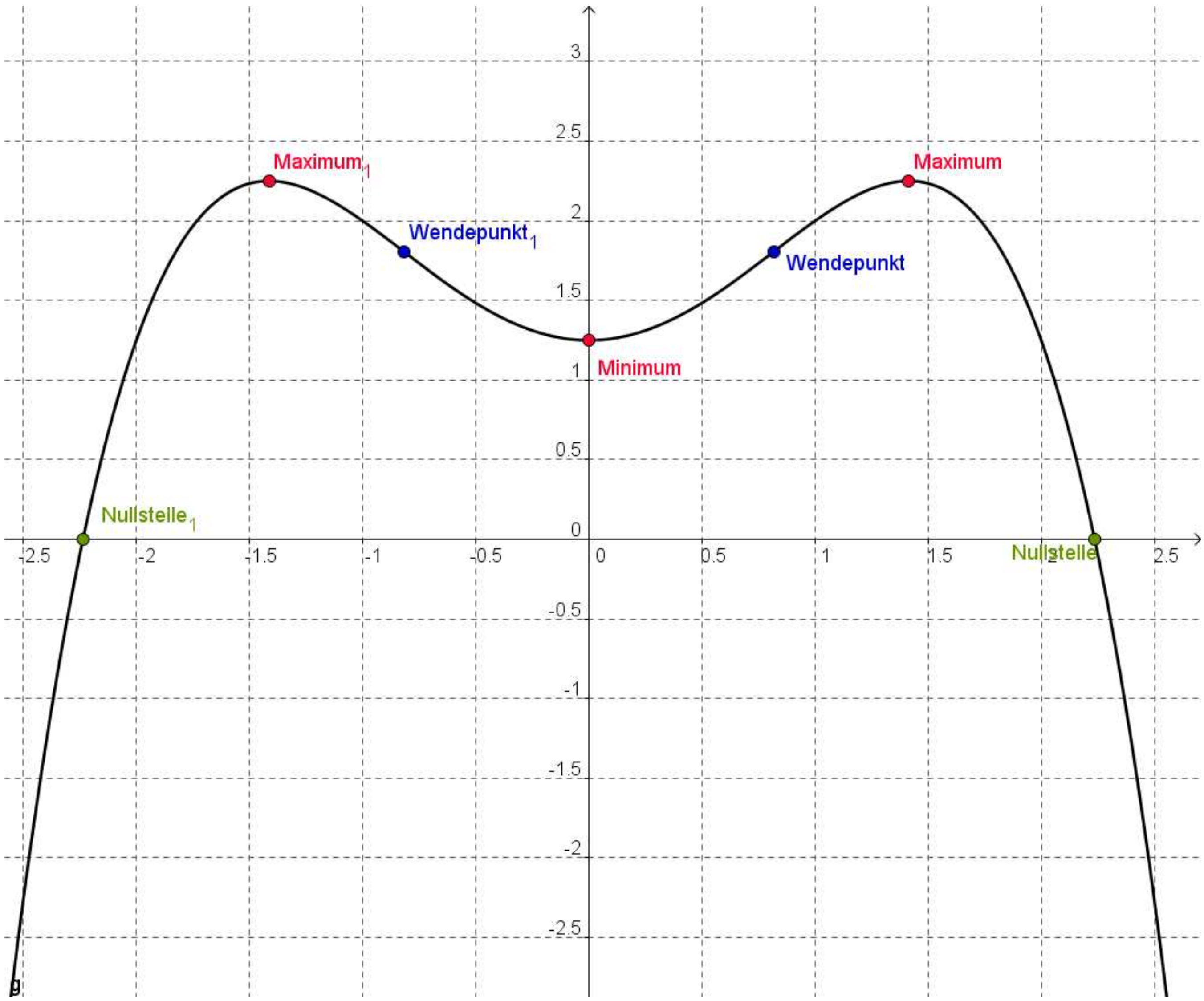
$$f'''(x) = -24x+18$$

$$f'''(1,86) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(1,86 \mid 21,15)$$

$$und \quad f'''(-0,36) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(-0,36 \mid 0,36)$$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 + \frac{5}{4}$

<u>Lösung:</u>



(i)

$$Ansatz: \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 + \frac{5}{4} = 0 \xrightarrow{Subst.} -\frac{1}{4}u^2 + u + \frac{5}{4} = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{4}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-1 \pm 1{,}5}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u_1 = -1 \quad und \quad u_2 = 5$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{5} \quad und \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

(ii) + (iii)

$$f'(x) = -x^3+2x = x\left(-x^2+2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$$

$$f''(x) = -3x^2+2$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = 2>0 \Rightarrow Min\left(0 \;\middle|\; \frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f''\left(\pm\sqrt{2}\right) = -4<0 \Rightarrow Max\left(\pm\sqrt{2} \;\middle|\; \frac{9}{4}\right)$$

Monotonieintervalle:

$\mathrm{I}_1 = \left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right[$ streng monoton steigend

$\mathrm{I}_2 = \left]-\sqrt{2}\,;0\right[$ streng monoton fallend

$\mathrm{I}_3 = \left]0\,;\sqrt{2}\right[$ streng monoton steigend

$\mathrm{I}_4 = \left]\sqrt{2}\,;\infty\right[$ streng monoton fallend

(iv)

$$f''(x) = -3x^2+2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$f'''(x) = -6x \Rightarrow f'''\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{6} \;\middle|\; 1{,}81\right)$$

3.) Steigungen und Tangente(n)

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3+x^2-4$

a) Berechnen Sie die Tangente in x = 2 an die Funktion

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3+x^2-4 \xrightarrow{x=2} f(2) = -\frac{8}{3}+4-4 = -\frac{8}{3}$$

$$f'(x) = -x^2+2x \xrightarrow{x=2} f'(2) = 4-4 = 0 = m$$

$$\xrightarrow{t(x) = mx+b} -\frac{8}{3} = 0\cdot 2+b \Rightarrow -\frac{8}{3} = b \Rightarrow Tangente:\; t(x) = -\frac{8}{3}$$

b) An welchen Stellen hat die Funktion eine Tangente mit folgender Gleichung: $t(x) = x+b \quad mit \quad b\in\Re$

<u>Lösung:</u>

$$f'(x) = -x^2+2x = 1 \xrightarrow{-1} -x^2+2x-1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{1+8}}{-2} = 1 \Rightarrow x=1$$

4.) Hoch- und Wendepunkte

a) Wie lautet die notwendige Bedingung für einen Hochpunkt?

<u>Lösung:</u> notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

b) Nennen Sie die hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt?

<u>Lösung:</u> hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$

c) Was versteht man unter einem Sattelpunkt?

<u>Lösung:</u> Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung m = 0.

d) Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = 3x^2-4kx+2$
Zeigen Sie, dass diese Funktion keinen Wendepunkt besitzt.

<u>Lösung:</u>

$$f_k(x) = 3x^2-4kx+2 \Rightarrow f_k'(x) = 6x-4k$$

$$\Rightarrow f_k''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow keine\,Wendepunkte$$

5.) „Absatzprobleme“

Während ihrer umfangreichen Reisetätigkeit mit der Deutschen Bahn AG ist der Ernährungs- und Gesundheitsberaterin Kunigunde Tschieß-Börger aufgefallen, dass ein bemerkenswerter Zusammenhang besteht zwischen der Höhe h (in cm) ihrer Stöckelschuhe und der Wahrscheinlichkeit w(h) dafür, dass sie ihren Reiskoffer selbst vom Bahnsteig zum Taxi tragen muss.

Der funktionale Zusammenhang zwischen w und h kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$w(h) = \frac{1}{100}h^2-0,16h+0,9 \quad mit \quad h\in[0\,;10]$$

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen, wenn h die Werte der Intervallgrenzen annimmt?

Lösung:

$$w(0) = \frac{1}{100} \cdot 0^2 - 0{,}16 \cdot 0 + 0{,}9 = 0{,}9 = 90\,\%$$

$$w(10) = \frac{1}{100} \cdot 10^2 - 0{,}16 \cdot 10 + 0{,}9 = 1 - 1{,}6 + 0{,}9 = 0{,}3 = 30\,\%$$

b) Wie hoch darf die Absatzhöhe maximal sein, damit die Wahrscheinlichkeit höchstens 50 % beträgt?

Lösung:

$$\frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9 \leq 0{,}5 \xrightarrow{-0{,}5} \frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}4 \leq 0$$

$$h_{1/2} = \frac{0{,}16 \pm \sqrt{0{,}0256 - 0{,}016}}{\frac{2}{100}} = \frac{0{,}16 \pm \sqrt{0{,}0256 - 0{,}016}}{\frac{2}{100}} = \frac{0{,}16 \pm 0{,}098}{\frac{2}{100}}$$

$$h_1 \leq 12{,}9 \quad und \quad h_2 \geq 3{,}1 \quad \Rightarrow \quad h \in [3{,}1\,;10]$$

Die Lösung $h_1 = 12{,}9$ ist nicht im Definitionsbereich.

c) Bei welcher Absatzhöhe ist die Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, am kleinsten?

Anmerkung: Berechnen Sie auch hier die Wahrscheinlichkeit und zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt.

Lösung:

$$w'(h) = \frac{1}{50}h - 0{,}16 = 0 \Rightarrow h = 8$$

$$w''(h) = \frac{1}{50} \Rightarrow w''(8) = \frac{1}{50} > 0 \Rightarrow Min(8 \mid 0{,}26)$$

Auf den ersten Blick scheint sich eine Absatzhöhe zu empfehlen, die W minimiert. Andererseits steigt bei hohen Absätzen der Ärger (ä), der immer dann entsteht, wenn sie den Koffer doch einmal selbst tragen muss: Je höher der Absatz, desto ärgerlicher das eigenhändige Koffertragen.

Die zugehörige Ärgerfunktion lautet daher: $ä(h) = \frac{1}{4}h + 1 \quad mit \quad h \in [0\,;10]$

Daraus kann sich Kunigunde nun ihren Gesamtfrust (g) ausrechnen, der sich als

Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, und dem Ärger ergibt: **g(h) = w(h) * ä(h)**

d) Zeigen Sie, dass der funktionale Ausdruck für g(h) folgende Form annimmt:

$$g(h) = \frac{1}{400}h^3 - \frac{3}{100}h^2 + \frac{13}{200}h + \frac{9}{10}$$

Lösung:

$$w(h) \cdot ä(h) = \left(\frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9\right) \cdot \left(\frac{1}{4}h + 1\right)$$

$$= \frac{1}{400}h^3 + \frac{1}{100}h^2 - \frac{4}{100}h^2 - 0{,}16h + \frac{9}{40}h + 0{,}9 = \frac{1}{400}h^3 - \frac{3}{100}h^2 + \frac{13}{200}h + 0{,}9$$

e) Welche Absatzhöhe würden Sie nun Frau Tschieß-Burger zukünftig empfehlen, damit der Gesamtfrust g(h) möglichst gering ausfällt?

Anmerkung: Berechnen Sie auch hier den Gesamtfrust und zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt.

Lösung:

$$g'(h) = \frac{3}{400}h^2 - \frac{6}{100}h + \frac{13}{200} = 0$$

$$\Rightarrow h_{1/2} = \frac{\frac{6}{100} \pm \sqrt{\frac{36}{10.000} - 4 \cdot \frac{3}{400} \cdot \frac{13}{200}}}{\frac{3}{200}} = \frac{0{,}06 \pm \sqrt{0{,}00165}}{\frac{3}{200}} = \frac{0{,}06 \pm 0{,}04}{\frac{3}{200}}$$

$$\Rightarrow h_1 = 6{,}708 \quad und \quad h_2 = 1{,}292$$

$$g''(h) = \frac{3}{200}h - \frac{6}{100}$$

$$\Rightarrow g''(1{,}292) = \frac{3}{200} \cdot 1{,}292 - \frac{6}{100} < -0{,}0406 \Rightarrow Max$$

$$\Rightarrow g''(6{,}708) = \frac{3}{200} \cdot 6{,}708 - \frac{6}{100} < 0{,}0406 \Rightarrow Min$$

Gesamtfrust:

$$g(6{,}708) = \frac{1}{400} \cdot 6{,}708^3 - \frac{3}{100} \cdot 6{,}708^2 + \frac{13}{200} \cdot 6{,}708 + \frac{9}{10} = 0{,}7407$$

Allgemeine Frage: Ist es ethisch und tiefenpsychologisch vertretbar und im Rahmen emanzipatorischer Überlegungen sinnvoll einer Frau den Koffer zu tragen?

6.) Mathematische Fragestellungen und Argumentation

Problem 1: Was versteht man unter einer doppelten Nullstelle und welche beiden Aussagen lassen sich dabei über eine Funktion machen?

Lösung:

Bei einer doppelten Nullstelle berührt der Graph der Funktion nur die x-Achse, daher liegt an dieser Stelle immer auch ein Hoch- oder Tiefpunkt.

Problem 2: Erklären Sie, warum zwischen zwei relativen Extremwerten immer mind. ein Wendepunkt liegen muss.

Lösung:

Zwischen zwei relativen Extremwerten muss ein Wechsel im Krümmungsverhalten vorliegen – entweder von Links- nach Rechtskrümmung oder umgekehrt; da sich am Wendepunkt das Krümmungsverhalten entsprechend ändert, muss zwischen den relativen Extrem mind. ein Wendepunkt liegen.

Problem 3: Warum können die zwei Tiefpunkte einer Funktion unterschiedliche Funktionswerte besitzen?

Lösung:

Da es sich immer um relative Extrema handelt, sind es Hoch- oder Tiefpunkte in Relation zu ihrer Umgebung, daher ist es möglich dass sich die Funktionswerte der Tiefpunkte in einigen Stellen unterscheiden.