Musterlösung **11. Jgst.** **3. Test** **Datum: 16.01.2009**

Klasse: GY GS 08 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gleichungen bzw. ganzrat. Fkt. vom Grad n

1.) Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

a) $x^2(2x+4)(x^3-1) \quad = \quad 0$

Lösung:

$$x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$
$$\wedge \quad 2x+4=0 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = -2$$
$$\wedge \quad x^3-1=0 \qquad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

b) $2x^3+4x^2 \quad = \quad 0$

Lösung:

$$2x^2(x+2) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2=0 \quad \wedge \quad x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=-2$$

c) $x^{n+1}-2^n x \quad = \quad 0$

Lösung:

$$x(x^n-2^n) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \wedge \quad x^n-2^n=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=2$$

d) $x^2+4x-2 \quad = \quad 3$

Lösung:

$$\xrightarrow{-3} \quad x^2+4x-5 \quad = \quad 0$$

$$x_{1/2} \quad = \quad \frac{-4\pm\sqrt{16-(-20)}}{2} \quad = \quad \frac{-4\pm\sqrt{36}}{2} \quad = \quad \frac{-4\pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 1 \quad \wedge \quad x_2 \quad = \quad -5$$

e) $-x^2+10 = 2x^4$

Lösung:

$$-x^2+10 = 2x^4 \Rightarrow 2x^4+x^2-10 = 0 \xrightarrow[x^2=u]{Subst.} 2u^2+u-10 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1\pm 9}{4} \Rightarrow u_1 = 2 \wedge u_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow[x^2=u]{\text{Resubst.}} x^2 = 2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

$$und \quad x^2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{Widerspruch (nicht lösbar)}$$

f) $2x^3-x^2-2x+1 = 0$

Lösung:

$$1.\,Lösung: \quad x = 1 \xrightarrow[\text{oder Horner-Schema}]{\text{Polynomdivision}} 2x^2+x-1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow x_2 = -1 \wedge x_3 = \frac{1}{2}$$

2.) Quadratische Gleichungen in der Praxis

Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch:

$$b(x) = -\frac{1}{50}x^2+x-8$$

Die unter Straßenniveau liegenden Auflagepunkte der Brücke sind C und D.

a) Bestimmen Sie die Höhe der Brücke vom Straßenniveau aus.

b) Berechnen Sie die Länge der Straße auf dieser Brücke.

c) Wie tief liegt der Auflagepunkt C unterhalb der Straße?

Lösung:

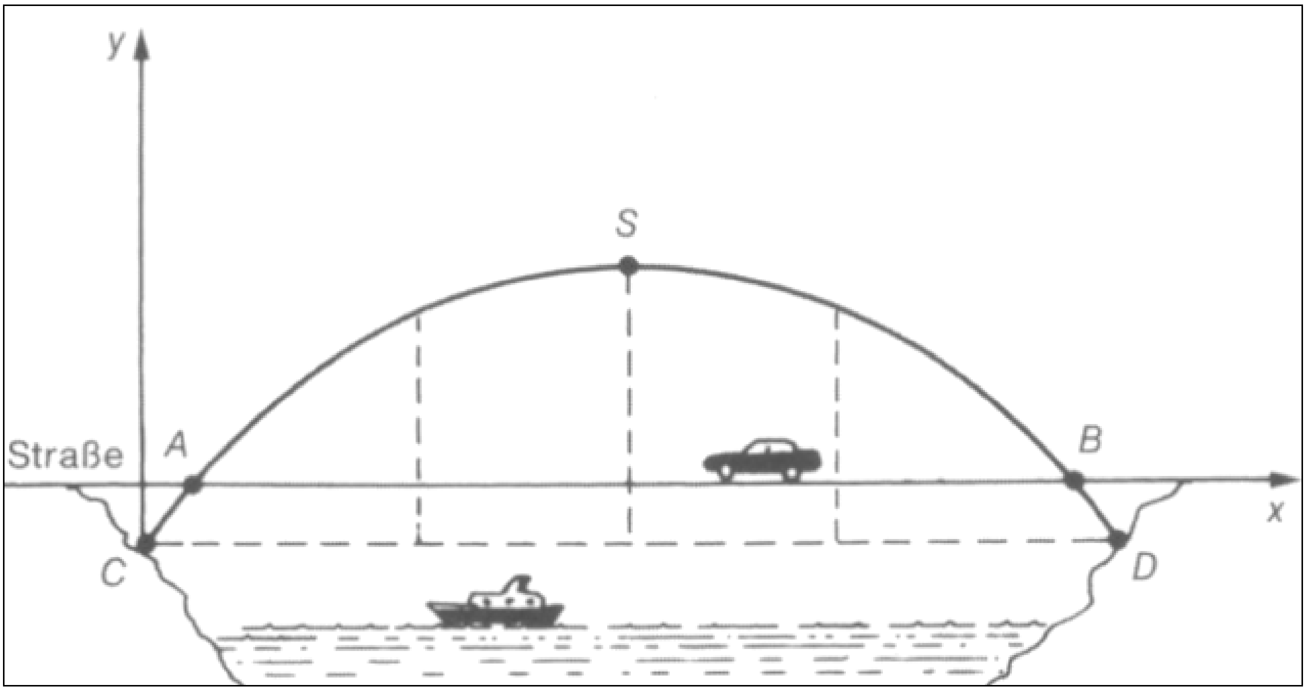
$$b(x) = -\frac{1}{50}x^2+x-8 = 0 \xrightarrow{\cdot(-50)} x^2-50x+400 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{50\pm\sqrt{2.500-1.600}}{2} = \frac{50\pm 30}{2} \Rightarrow x_1 = 10 \wedge x_2 = 40$$

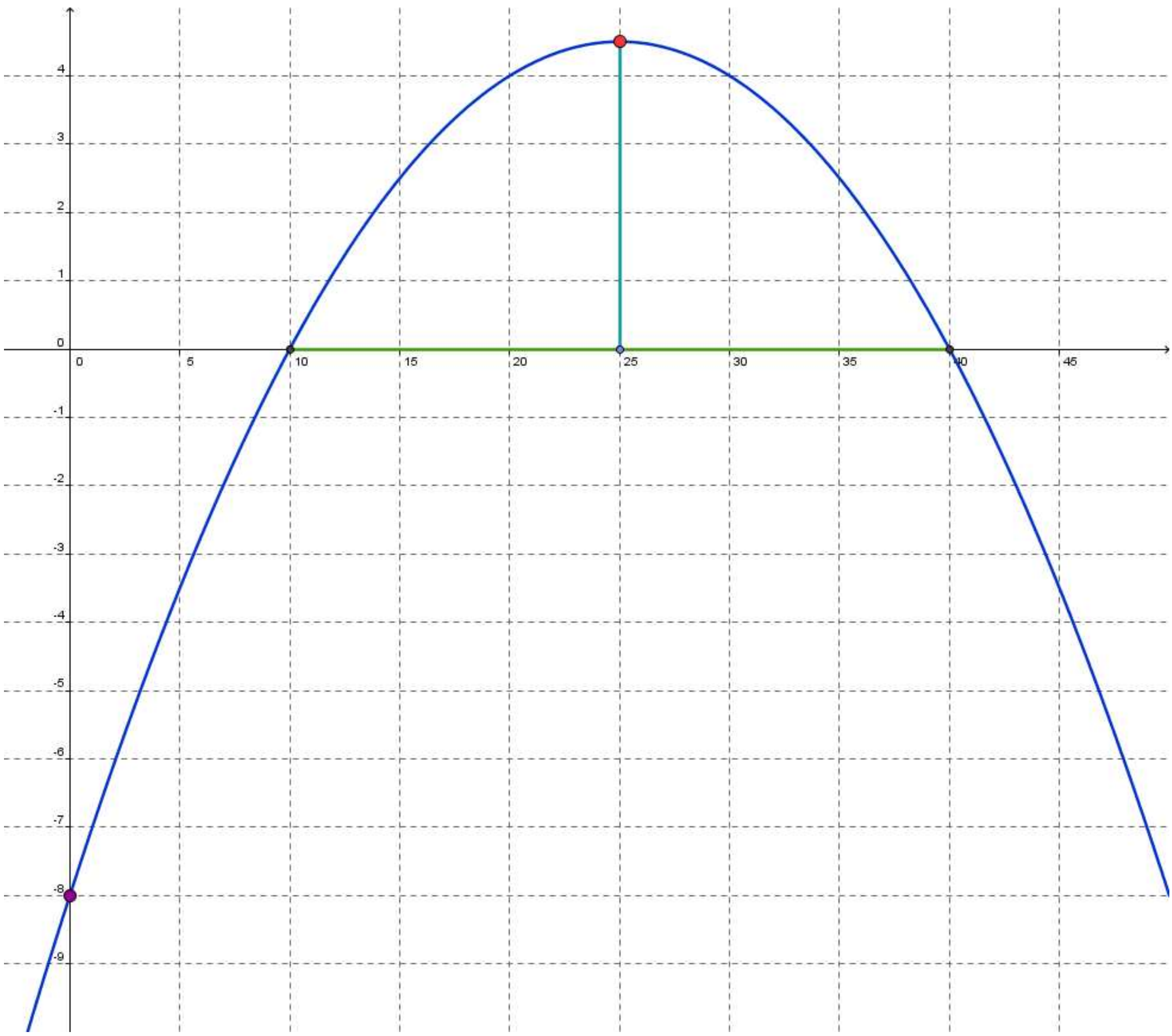
$$Länge\ der\ Straße: \quad \Delta x = 30$$

$$Höhe\ der\ Brücke: \quad x_1 = \frac{10+40}{2} = 25 \Rightarrow b(25) = -\frac{1}{50}\cdot 25^2+25-8 = 4{,}5$$

$$Auflagepunkt: \quad b(0) = -8$$



y
S
Straße
A
B
x
C
D



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

3.) Ganzrationale Funktionen I

Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

$a_4 = 3 \qquad a_3 = 2 \qquad a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Wie viele Nullstellen hat diese Funktion mindestens, wie viele höchstens?

Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösung: Da eine Funktion 4. Grades vorliegt, hat die Funktion maximal 4 Nullstellen, könnte aber auch keine haben.
Hier aber ist in jedem Fall eine Nullstelle bei $x = 0$, da die Koeffizienten $a_2 = a_1 = a_0 = 0$ vorliegen.

4.) Ganzrationale Funktionen II

Geben Sie die Vorschrift einer ganzrationalen Funktion 4. Grades an, welche die angegebenen Nullstellen und keine weiteren besitzt:

$x_1 = x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = 4$

Lösung: $f(x) = (x+3)^2 (x-2)(x-4)$

5.) Horner-Schema

Bestimmen Sie die Funktionswerte bei folgenden Funktionstermen:

a) $g(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 8 \qquad für \quad x = -3$

	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	2,00	4,00	1,00	1,00	8,00	
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	2,00	4,00	1,00	1,00	8,00	
-3	0,00	-6,00	6,00	-21,00	60,00	
	2,00	-2,00	7,00	-20,00	68,00	f(x0)

b) $f(x) = -4x^6 - 3x^5 + 2x^3 + 9x \qquad für \quad x = 2$

	x6	x5	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	-4,00	-3,00	0,00	2,00	0,00	9,00	0,00	
x0	a(6)	a(5)	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	-4,00	-3,00	0,00	2,00	0,00	9,00	0,00	
2		-8,00	-22,00	-44,00	-84,00	-168,00	-318,00	
	-4,00	-11,00	-22,00	-42,00	-84,00	-159,00	-318,00	f(x0)