Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 02.03.2009**

Klasse: GY GS 08 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die drei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y

a) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+2}$

Lösung:

$$Zähler: \quad x^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad |x|=3 \quad [2\ Nullstellen]$$

$$Nenner: \quad x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$keine\ Lücke$$

$$Asymptote: Polynomdivision \quad \Rightarrow \quad a(x)=x-2$$

$$S_y(0\mid -4{,}5)$$

b) $g(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

Lösung:

$$Zähler: \quad (x+1)(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad [Nullstelle] \quad und \quad x_2=-1$$

$$Nenner: \quad (x+1)(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_2=-1$$

$$Lücke: \quad x=-1$$

$$Asymptote: Polynomdivision \quad \Rightarrow \quad a(x)=1$$

$$S_y(0\mid -1)$$

c) $h(x) = \dfrac{4(x^2 - x)}{x^4 - 3x^2 + 2}$

Lösung:

$$Zähler: \quad 4x(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad [Lücke] \quad und \quad x_2 = 0 \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad \xrightarrow{Subst.} \quad u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = 1 \quad und \quad u_2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 1 \quad [Lücke] \quad und \quad x_2 = -1 \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$und \quad x_3 = \sqrt{2} \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_4 = -\sqrt{2} \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$Lücke: \quad x = 1$$

$$Asymptote: Zählergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x) = 0$$

$$S_y(0 \mid 0)$$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt:

a) Polstelle bei x = 3; Nullstelle bei x = - 2; Asymptote a(x) = 0,5

Lösung: $f(x) = \dfrac{x+2}{2(x-3)}$

b) Lücke bei x = 2; doppelte Nullstelle bei x = - 4

Lösung: $f(x) = \dfrac{(x+4)^2(x-2)}{(x-2)}$

c) Nennergrad: n = 4; Lücke bei x = - 1; Polstelle bei x = - 4; keine Nullstelle; Asymptote a(x) = 3

Lösung: $f(x) = \dfrac{3(x+1)^4}{(x+4)(x+1)^3}$

3.) Stetigkeit

Untersuchen Sie folgende Funktion mittels geeigneter Näherungsrechnung auf Stetigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 2x & \text{für } x < 3 \\ -0{,}5x^2 + 0{,}5x & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

Lösung:

(i) Funktionswert: $f(3) \quad = \quad -0{,}5 \cdot 3^2 + 0{,}5 \cdot 3 \quad = \quad -3$

(ii) von links:

x	2,9	2,99	2,999	=> 3
$f(x) \quad = \quad -\frac{1}{3}x^3 + 2x$	- 2,329667	- 2,930299	- 2,993003	=> - 3

(iii) von rechts:

x	3,1	3,01	3,001	=> 3
$f(x) \quad = \quad -0{,}5x^2 + 0{,}5x$	- 3,255	- 3,02505	- 3,0025005	=> - 3

Ergebnis: $\lim\limits_{h \to 0} f(3-h) = \lim\limits_{h \to 0} f(3+h) = f(3) \quad \Rightarrow \quad f(x)\ \textit{ist stetig}$

4.) Gebrochen-rationale Funktionen III

Gegeben ist der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion.

a) Nennen Sie zwei Merkmale, an denen man erkennt, warum es sich hier in der Zeichnung um eine gebr.-rat. Funktion handelt?

Lösung:

Die Funktion hat zwei Unstetigkeitsstellen:
bei x = - 1 eine Unendlichkeitsstelle in Form eines Pols und bei x = 3 eine Lücke.

b) Geben Sie die Polstelle(n), Lücke(n) und Nullstelle(n) an.

Lösung:

Polstelle: x = - 1 Lücke: x = 3 Nullstelle: x = - 2 (doppelt)

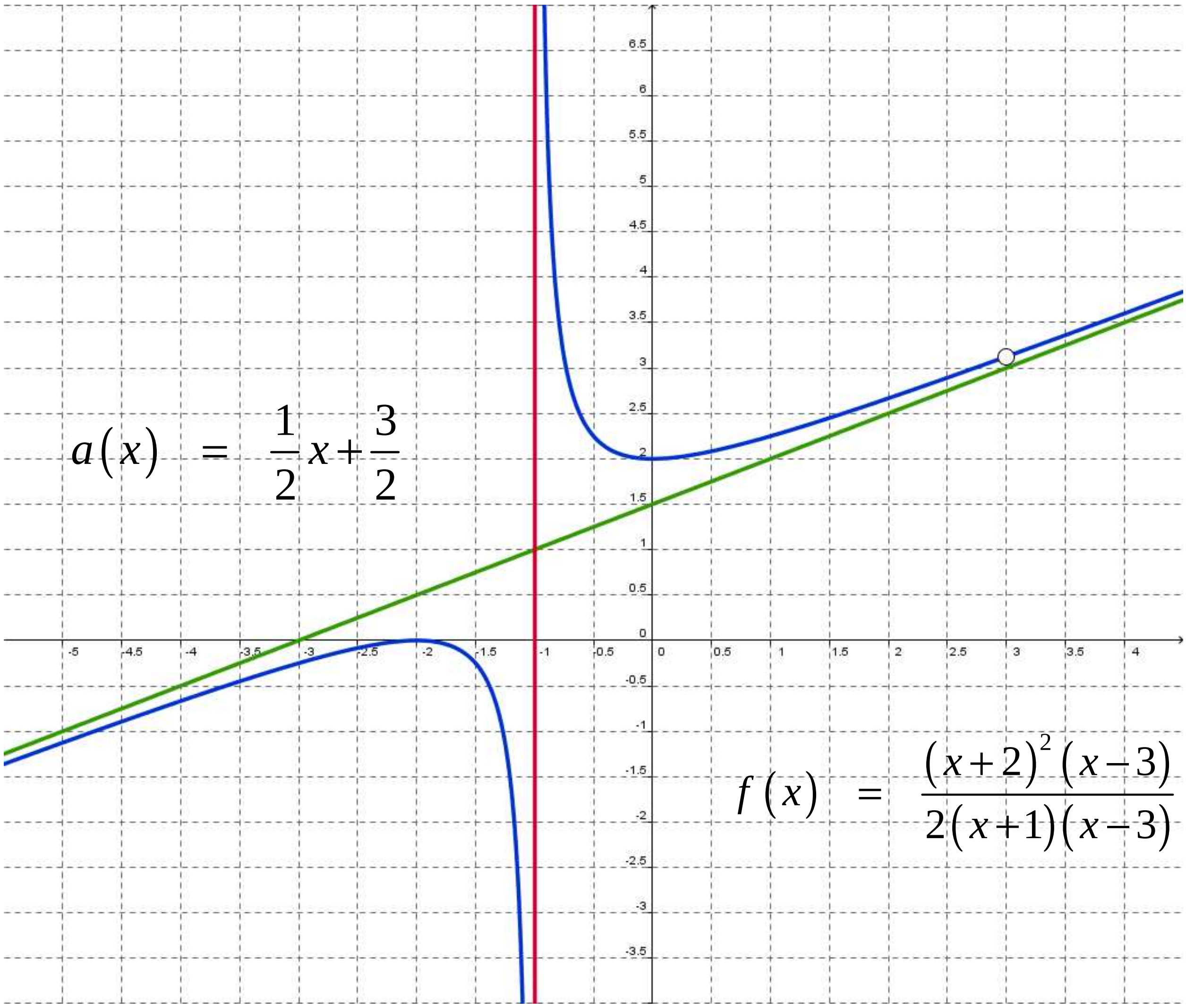
c) Zeichnen Sie die Asymptote ein.

Lösung: ***siehe Zeichnung***

d) Welche Art von Funktion ist die Asymptote?

Lösung: Die Asymptote ist eine lineare Funktion bzw. Gerade.

Graph zu 4.)



e) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der Asymptote.

Lösung: ***siehe Zeichnung***

f) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der gebr.-rat. Funktion.

Lösung: ***siehe Zeichnung***