**Musterlösung** **12. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 30.09.2009**

**Klasse: GY GS 02-08** **Fach: Mathematik (Grundfach)**

**Thema:** **Ganzrat. Funktionen mit Parameter; Produkt-, Quotienten- & Kettenregel**

## 1.) Ableitungen

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung der gegebenen Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich und sinnvoll:

a) $$f(x) = 3x^2 - x + 1$$

***Lösung:*** $$f'(x) = 6x - 1$$

b) $$f_t(x) = \frac{2}{t^2}x^3 - tx^2 + tx$$

***Lösung:*** $$f'(x) = \frac{6}{t^2}x^2 - 2tx + t$$

c) $$f_t(x) = \frac{(tx)^2 - x + 2}{x^2}$$

***Lösung:***

$$f_t(x) = \frac{t^2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = t^2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \Rightarrow f_t'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

d) $$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$$

***Lösung:*** $$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

e) $$f(x) = (2x-1)(x^2-3x)$$

***Lösung:*** $$f'(x) = 2(x^2-3x) + (2x-1)(2x-3)$$

f) $$f_t(x) = (2x^4 + 3tx^2 - t^2)^{10}$$

***Lösung:*** $$f'(x) = 10(2x^4 + 3tx^2 - t^2)^9 \cdot (8x^3 + 6tx)$$

g) $$f_t(x) = (3x-2t)^2\left(x+x^2\right)^4$$

__*Lösung:*__

$$f'(x) = 2(3x-2t)\cdot 3\cdot\left(x+x^2\right)^4+(3x-2t)^2\cdot 4\left(x+x^2\right)^3\cdot(1+2x)$$
$$f'(x) = (3x-2t)\cdot\left(x+x^2\right)^3\left[6\left(x+x^2\right)+4(3x-2t)(1+2x)\right]$$
$$f'(x) = (3x-2t)\cdot\left(x+x^2\right)^3\left[6x+6x^2+12x+24x^2-8t-16tx\right]$$
$$f'(x) = (3x-2t)\cdot\left(x+x^2\right)^3\left(18x+30x^2-8t-16tx\right)$$

h) $$f_t(x) = \frac{x^3-3tx^2+1}{x^2+1}$$

__*Lösung:*__ $$f_t'(x) = \frac{\left(3x^2-6tx\right)\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^3-3tx^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

**2.) Theoretisches zu Ableitungen**

a) Erklären Sie die Kettenregel am Beispiel $f(x) = g\left[u(x)\right]$.

__*Lösung:*__ Ableitung der äußeren Funktion g(u), dann die Ableitung der inneren Funktion u(x) als Produkt angefügt.

b) Wie muss die Ableitung lauten, wenn folgende Funktion vorliegt:

$$f(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$$

__*Lösung:*__

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

c) Leiten Sie den Funktionsterm f(x) nach der Produktregel ab:

$$f(x) = x^3\cdot(2x-1)\cdot\left(x^2+2\right)$$

__*Lösung:*__

$$f'(x) = 3x^2\cdot(2x-1)\cdot\left(x^2+2\right)+x^3\cdot 2\cdot\left(x^2+2\right)+x^3\cdot(2x-1)\cdot 2x$$
$$f'(x) = 3x^2\cdot(2x-1)\cdot\left(x^2+2\right)+2x^3\cdot\left(x^2+2\right)+2x^4\cdot(2x-1)$$

d) Leiten Sie den Ausdruck $f(x) = (4x^2 - 2x + 1)^3$

sowohl nach der Ketten- als auch nach der Produktregel ab und

zeigen Sie, dass beide Ableitungen zum gleichen Ergebnis führen.

***<u>Lösung:</u>***

Ableitung nach der Kettenregel:

$$f'(x) = 3(4x^2 - 2x + 1)^2 \cdot (8x - 2)$$

Ableitung nach der Produktregel:

$$f(x) = (4x^2 - 2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = (8x-2) \cdot (4x^2 - 2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x + 1) + (4x^2 - 2x + 1) \cdot (8x-2) \cdot (4x^2 - 2x + 1)$$
$$+ (4x^2 - 2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x + 1) \cdot (8x-2)$$

$$f'(x) = (8x-2) \cdot (4x^2 - 2x + 1)^2 + (4x^2 - 2x + 1)^2 \cdot (8x-2) + (4x^2 - 2x + 1)^2 \cdot (8x-2)$$

$$f'(x) = 3(8x-2) \cdot (4x^2 - 2x + 1)^2$$

**3.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter I**

Gegeben sei folgende Funktion: $f_{a,b}(x) = ax^3 + bx^2 \quad mit \quad a, b \in \Re^+$

a) Zeigen Sie, dass $f_{a,b}(x)$ immer genau eine Wendestelle besitzt.

***<u>Lösung:</u>***

$$f_{a,b}'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f_{a,b}''(x) = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

$$f_{a,b}'''(x) = 6a \underset{weg.Vor.}{\neq} 0 \Rightarrow \text{genau ein Wendepunkt existiert}$$

b) Welche Bedingung muss gelten, damit $f_{a,b}(x)$ zwei Extrema besitzt?

Beweisen Sie dabei auch mittels hinreichender Bedingung, dass

Ihre Lösungen Extremwerte darstellen.

**Lösung:**

$$f_{a,b}'(x) = x(3ax+2b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -\frac{2b}{3a}$$

$$f_{a,b}''(0) = 2b \underset{weg.Vor.}{>} 0 \Rightarrow Min$$

$$f_{a,b}''\left(-\frac{2b}{3a}\right) = -2b \underset{weg.Vor.}{<} 0 \Rightarrow Max$$

**4.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter II**

Gegeben sei folgende Funktion: $f_k(x) = \frac{1}{4}x^3 - kx^2 + kx \quad mit \quad k \in \Re^+$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit von k.

**Lösung:**

$$f_k(x) = x\left(\frac{1}{4}x^2 - kx + k\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - k}}{\frac{1}{2}} = 2\left(k \pm \sqrt{k^2 - k}\right)$$

b) Für welche Werte von k hat die Funktion genau zwei Nullstellen.

**Lösung:**

$$Bed.: \quad k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0 \quad \text{(Achtung: nicht definiert!)} \quad und \quad k_2 = 1$$

c) Begründen Sie, warum die Funktion immer mindestens eine Nullstelle besitzt.

**Lösung:** x = 0 ist parameterfrei und daher immer vorhanden.

d) Kann die Funktion auch drei Nullstellen besitzen?

Beweisen Sie Ihre Behauptung durch geeignete Berechung und Begründung.

**Lösung:** Für k > 1 besitzt die Funktion insgesamt drei Nullstellen, da dann für die Diskriminante ebenfalls gilt: D > 0

e) Ermitteln Sie das Maximum und das Minimum der Funktion für k = 1?

***Lösung:***

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \quad ; \quad f_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 \quad ; \quad f_1''(x) = \frac{3}{2}x - 2$$

$$f_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \pm 1}{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \quad und \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$f_1''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow Min(2 \mid 0)$$

$$f_1''\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - 2 = -1 < 0 \Rightarrow Max\left(\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{8}{27}\right)$$

f) Für welchen Wert von k hat der Graph der Funktion an der Stelle x = 2 die Steigung m = -3

***Lösung:***

$Alt.1: \quad Ableitung$

$$f_k'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2kx + k \xrightarrow[m=-3]{x=2} -3 = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2k \cdot 2 + k \Rightarrow k = 2$$

$$Alt.2: \quad Steigung\ in\ x = 2 \Rightarrow 3 - 3k = m \xrightarrow{m=-3} -3 = 3 - 3k \Rightarrow k = 2$$

g) Berechnen Sie die Wendestelle in Abhängigkeit von k.

***Lösung:***

$$f_k'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2kx + k \quad ; \quad f_k''(x) = \frac{3}{2}x - 2k \quad ; \quad f_k'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_k''(x) = \frac{3}{2}x - 2k = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}k \\ f_k'''(x) = \frac{3}{2} \quad bzw. \quad f_k'''\left(\frac{4}{3}k\right) = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow Wendestelle: x = \frac{4}{3}k$$

h) Für welchen Wert von k ist der Graph hier dargestellt?

***Lösung:***

Ansatz mittels Nullstelle: $2\left(k+\sqrt{k^2-k}\right) = 6$

$\xrightarrow{:2} \quad k+\sqrt{k^2-k} = 3 \quad \xrightarrow{-k} \quad \sqrt{k^2-k} = 3-k$

$\xrightarrow{quadr.} \quad k^2-k = (3-k)^2$

$\Rightarrow \quad k^2-k = 9-6k+k^2 \quad \xrightarrow{-k^2+6k} \quad 5k = 9$

$\xrightarrow{:5} \quad k = 1{,}8$

Graph der Funktion: