Musterlösung **12. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 09.12.2009**

Klasse: GY GS 02-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: **Newton-Verfahren; Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen; Ableitungen**

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f_t(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 + tx - 3\right)^8$

Lösung: $f_t'(x) = 8\left(\frac{2}{5}x^2 + tx - 3\right)^7 \left(\frac{4}{5}x + t\right)$

b) $f_t(x) = \frac{-x^2 + 2xt^2}{4x^3 + 1}$

Lösung: $f_t'(x) = \frac{\left(-2x + 2t^2\right)\left(4x^3 + 1\right) - 12x^2\left(-x^2 + 2xt^2\right)}{\left(4x^3 + 1\right)^2}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 3x\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{6}x^3\right)$

Lösung: $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + 3\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(\frac{1}{x} + 3x\right) \cdot \left(2x^5 - \frac{1}{2}x^2\right)$

d) $f(x) = (3x - 4) \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x}$

Lösung: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x} + (3x - 4) \cdot \frac{\frac{1}{2}x - 2}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x}}$

2.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen I

Eine Parabel 4. Grades hat im Ursprung einen Sattelpunkt und einen Tiefpunkt in T (-2 / -8).
Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \quad und \quad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$I.) \quad f(0) = e = 0$$

$$II.) \quad f'(0) = d = 0$$

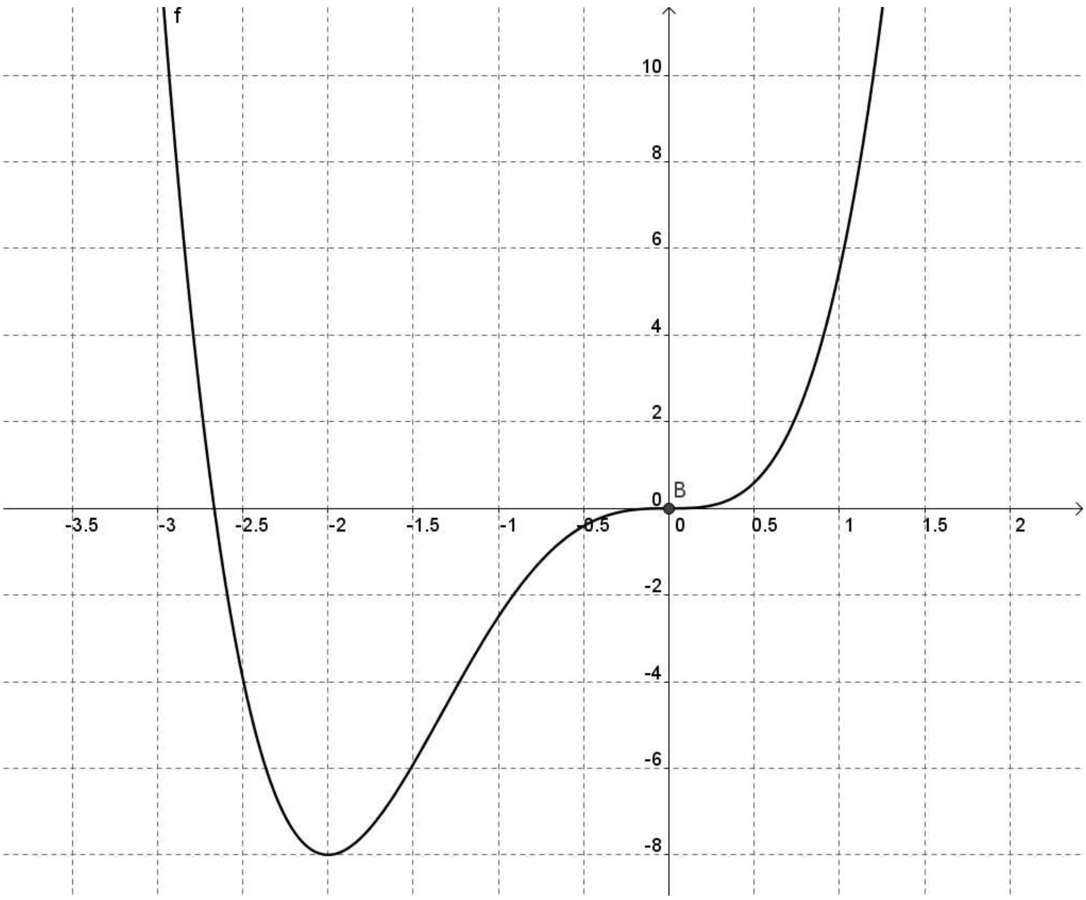
$$III.) \quad f''(0) = c = 0$$

$$IV.) \quad f(-2) = 16a - 8b = -8 \xrightarrow{\cdot 2} 32a - 16b = -16$$

$$V.) \quad f'(-2) = -32a + 12b = 0 \xrightarrow{Übertrag} 32a + 12b = 0$$

$$\xrightarrow{Additionsverfahren} -4b = -16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 4x^3$$



3.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen II

Bestimmen Sie die hier beschriebene Funktion 4. Grades:
Der zur y-Achse symmetrische Graph vom Grad n = 4 geht durch P (0 / 2) und hat bei x = 2 ein Extremum; er berührt dort auch die x-Achse.

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \qquad und \qquad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$I.)\quad Achsensymmetrie: \quad b = d = 0$$

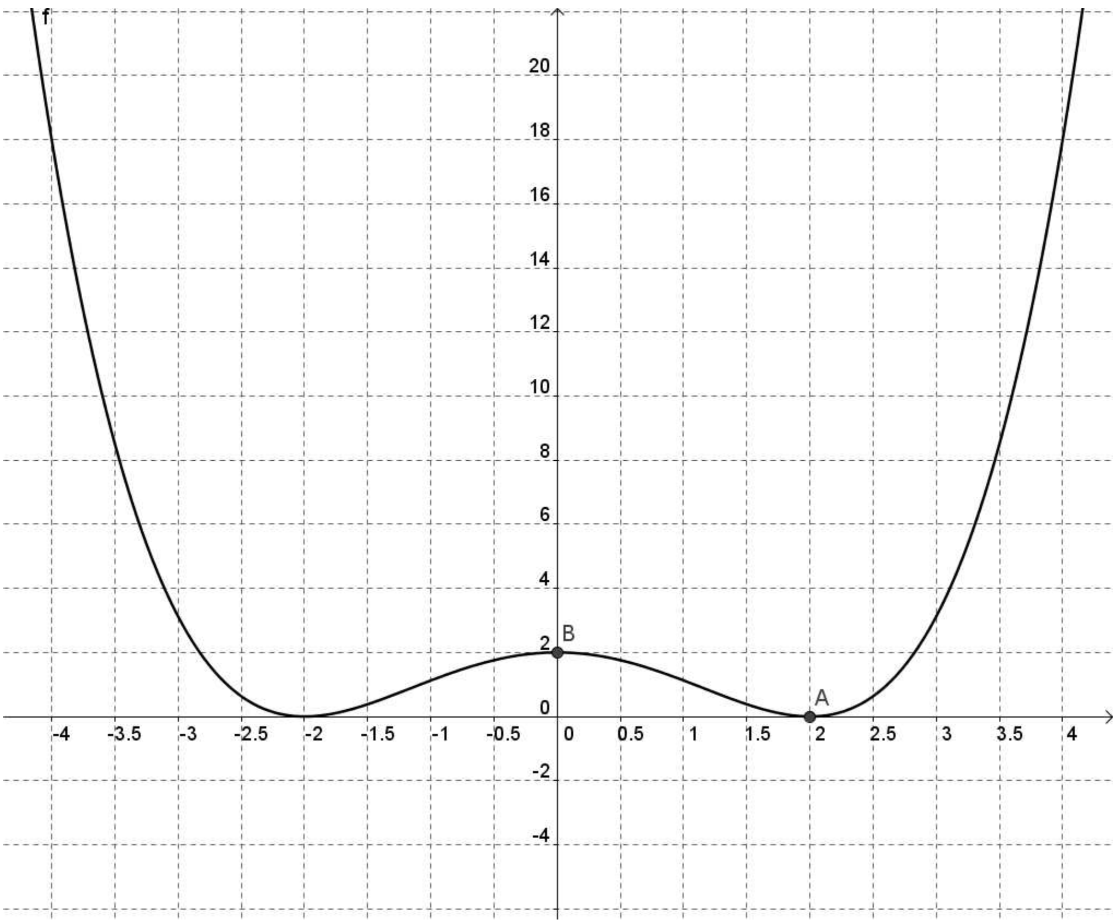
$$II.)\quad f(0) = e = 2$$

$$III.)\quad f(2) = 16a + 4c + e = 0 \xrightarrow{e=2} 16a + 4c = -2$$

$$IV.)\quad f'(2) = 32a + 4c = 0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -32a - 4c = 0$$

$$\xrightarrow{Additionsverfahren} -16a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$$



4.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen III

Auf dem Schreibtisch fand ich folgendes Diagramm, das leider etwas beschädigt ist. Glücklicherweise sind einige charakteristische Teile aber noch erkennbar.

a) Welche Eigenschaften können Sie auf dem Schaubild erkennen?

Lösung: Hochpunkt H (-1 / 2) Punkt B (0 / 1)

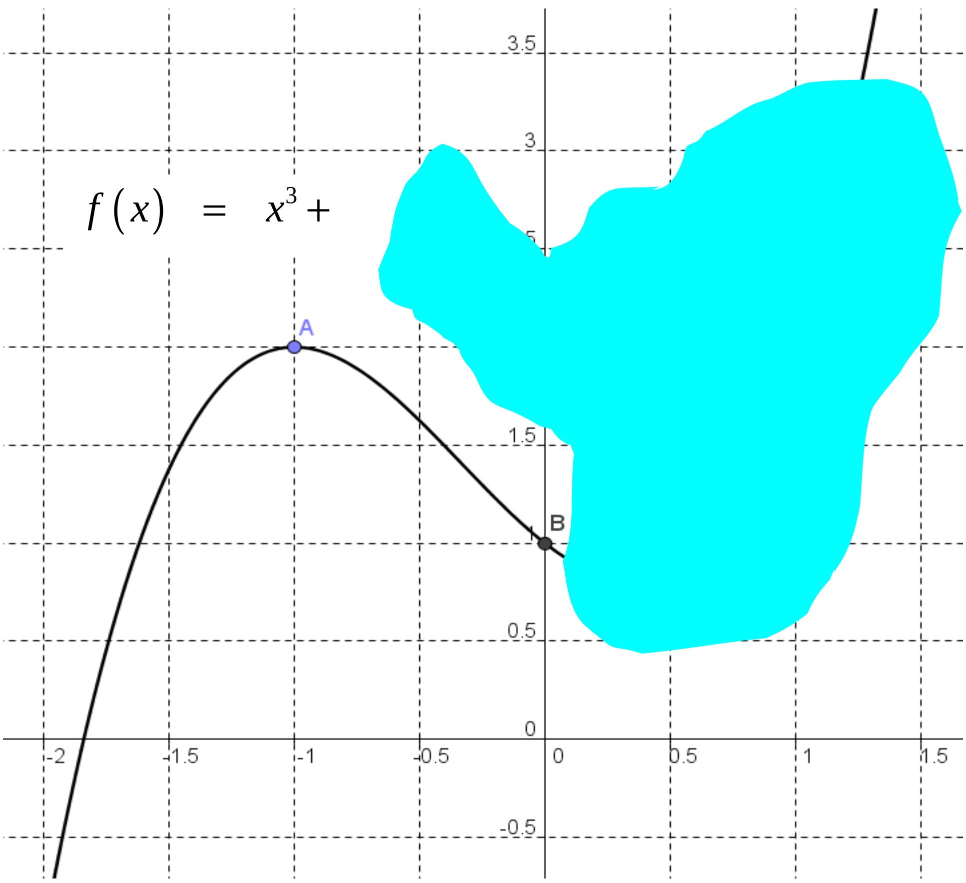
b) Wie lautet der allgemeine Funktionsterm?

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad und \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

c) Bilden Sie die notwendigen Ansätze und erstellen Sie die Funktionsvorschrift.



Lösung:

$$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x) = 3ax^2+2bx+c \quad und \quad f''(x) = 6ax+2b$$

$$I.) \quad a = 1$$

$$II.) \quad f(0) = d = 1$$

$$III.) \quad f(-1) = 1\cdot(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+1 = 2$$

$$\Rightarrow \quad (-1)+b-c+1 = 2 \Rightarrow b-c = 2$$

$$IV.) \quad f'(-1) = 3\cdot 1\cdot(-1)^2+2b(-1)+c = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3-2b+c = 0 \Rightarrow -2b+c = -3$$

$$\xrightarrow{III.)+IV.)} \quad -b = -1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^3+x^2-x+1$$

5.) Newton-Iteration

a) Gegeben seien die Funktionen f(x) und g(x) mit den Funktionsvorschriften:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3+2 \quad und \quad g(x) = -x^2+4x$$

Berechnen Sie nun mittels Iteration eine Schnittstelle der beiden Funktionen für die gilt: $x > 0$

Lösung:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{4}x^3+2 = -x^2+4x$$

$$h(x) = -\frac{1}{4}x^3+x^2-4x+2 \quad und \quad h'(x) = -\frac{3}{4}x^2+2x-4$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-1.25	-2.75	0.545454
1	0.545454	0.0751314	-3.132231	0.569441
2	0.569441	0.00033659	-3.104315	0.569549

b) Bestimmen Sie den Wert von $\sqrt[3]{15}$ mit der Newton-Iteration mit geeignetem Startwert in zwei Iterationen.

Lösung: $f(x) = x^3 - 15 \quad und \quad f'(x) = 3x^2$

Startwert: x = 2

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-7	12	2.58333333333
1	2.583333	2.2401620	20.0208333	2.47144178518
2	2.471441	0.09562696	18.3240734	2.46622313289
3	2.466223	0.00020178	18.2467696	2.46621207438

Startwert: x = 3

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	3	12	27	2.5555555
1	2.5555555	1.68998628	19.592592	2.4692991
2	2.4692991	0.05639950	18.292315	2.4662159

6.) Gebrochen-rationale Funktionen

Gegeben sei die Funktion f(x) mit der Funktionsvorschrift

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$$

Bestimmen Sie folgende Eigenschaften und **zeichnen Sie den Graphen**:

a) Definitionsmenge

Lösung: $D = \Re \setminus \{1\}$

b) Null- und Polstellen

Lösung:

$$\textit{Zählernullstellen}: \quad x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = -2$$

$\Rightarrow$ Nullstellen der Funktion

$$\textit{Nennernullstelle}: \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\Rightarrow$ Polstelle der Funktion

c) Asymptote

Lösung: Polynomdivision:

$$\left(x^2+2x\right):(x-1) \quad = \quad x+3+\frac{3}{x-1}$$

$$Asymptote: \quad a(x) \quad = \quad x+3$$

d) Extremwerte (notwendige Bedingung)

Lösung:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{(2x+2)(x-1)-\left(x^2+2x\right)\cdot 1}{(x-1)^2} \quad = \quad \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) \quad = \quad \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-2 \quad = \quad 0$$

$$x_{1/2} \quad = \quad \frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 2,7 \quad \wedge \quad x_2 \quad = \quad -0,7$$

$$\Rightarrow \quad f(2,7) \quad = \quad 7,46 \quad [=Min] \quad \wedge \quad f(-0,7) \quad = \quad 0,53 \quad [=Max]$$