Musterlösung **12. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 08.12.2009**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: **Newton-Verfahren; Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen; Ableitungen**

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f_t(x) = \left(\frac{1}{4}x^3 + tx^2 - 2\right)^5$$

Lösung: $$f_t'(x) = 5\left(\frac{1}{4}x^3 + tx^2 - 2\right)^4 \left(\frac{3}{4}x^2 + 2tx\right)$$

b) $$f_t(x) = \frac{-3x^2 + xt^4}{2x-3}$$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{\left(-6x+t^4\right)(2x-3) - 2\left(-3x^2 + xt^4\right)}{(2x-3)^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{-12x^2 + 18x + 2xt^4 - 3t^4 + 6x^2 - 2xt^4}{(2x-3)^2} = \frac{-6x^2 + 18x - 3t^4}{(2x-3)^2}$$

c) $$f(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 4x\right) \cdot \left(\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^2\right)$$

Lösung:

$$f'(x) = \left(\frac{-2}{x^3} - 4\right) \cdot \left(\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^2\right) + \left(\frac{1}{x^2} - 4x\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{2}{3x} - \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x} - 2x^4 - \frac{8}{3}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{5}{2}x^4 - 4x^2 + \frac{1}{4}x$$

d) $$f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x\right) \cdot \sqrt{3x-4}$$

Lösung: $$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \sqrt{3x-4} + \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x\right) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$$

2.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen I

Eine Parabel 4. Grades hat im Ursprung einen Sattelpunkt und einen Hochpunkt in H (2 / 8).
Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \qquad und \qquad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$I.) \quad f(0) = e = 0$$

$$II.) \quad f'(0) = d = 0$$

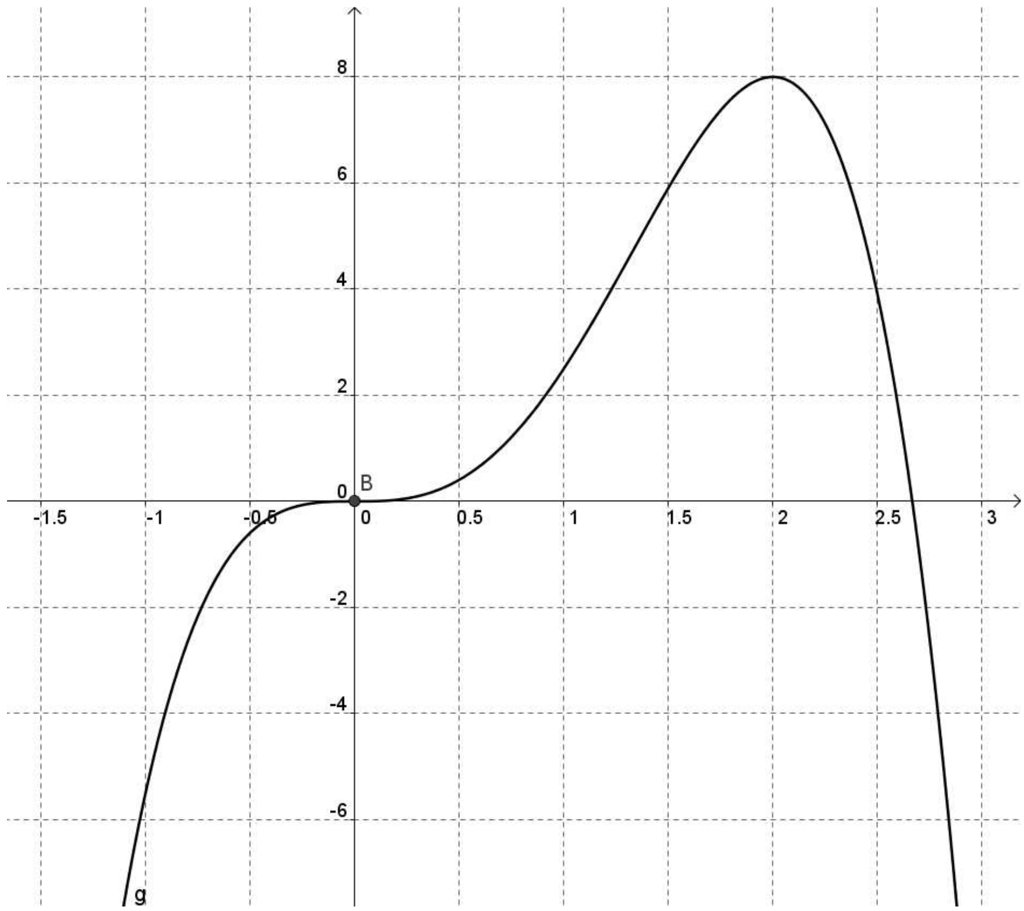
$$III.) \quad f''(0) = c = 0$$

$$IV.) \quad f(2) = 16a + 8b = 8 \xrightarrow{\cdot(-2)} -32a - 16b = -16$$

$$V.) \quad f'(2) = 32a + 12b = 0 \xrightarrow{\text{Übertrag}} 32a + 12b = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Additionsverfahren}} -4b = -16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 4x^3$$



3.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen II

Bestimmen Sie die hier beschriebene Funktion 4. Grades:

Der zur y-Achse symmetrische Graph vom Grad n = 4 geht durch P (0 / 2) und hat bei x = 2 ein Extremum; er berührt dort auch die x-Achse.

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \qquad und \qquad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$I.) \quad Achsensymmetrie: \quad b = d = 0$$

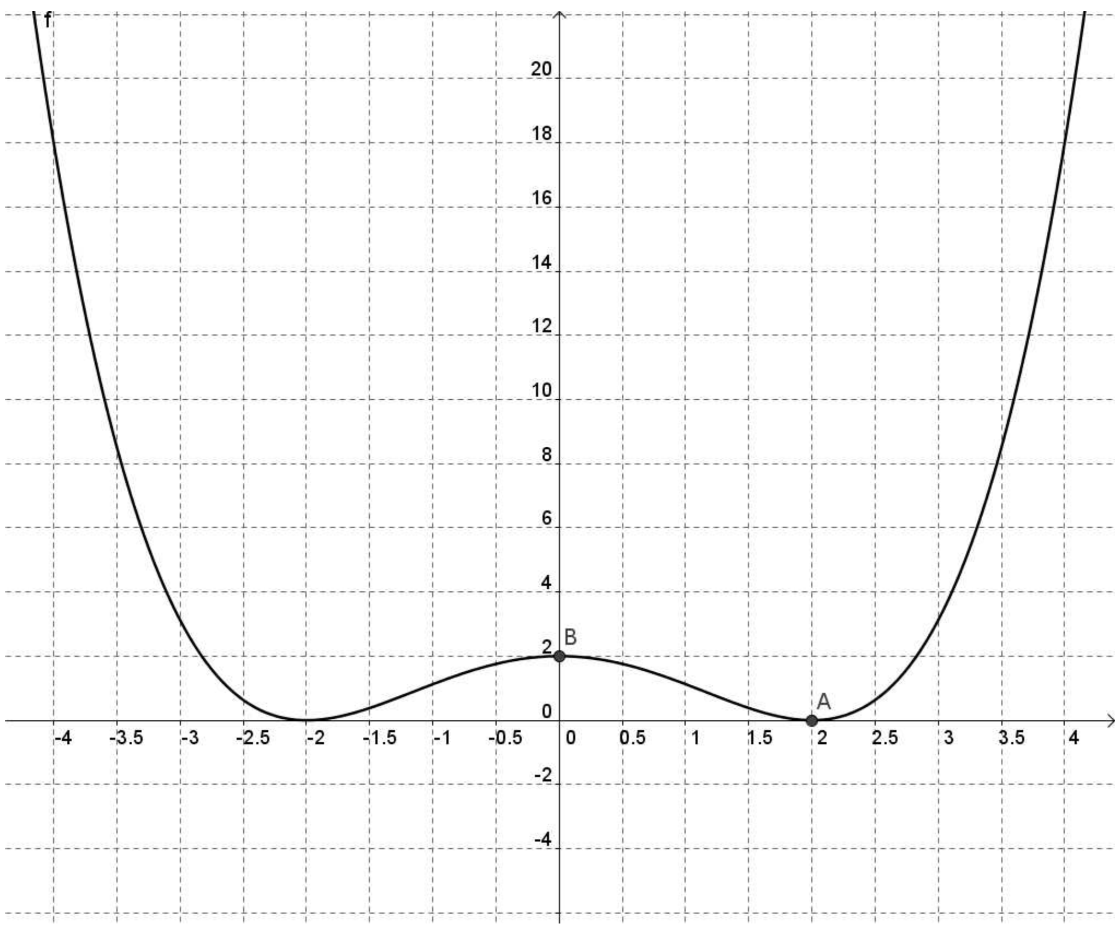
$$II.) \quad f(0) = e = 2$$

$$III.) \quad f(2) = 16a + 4c + e = 0 \xrightarrow{e=2} 16a + 4c = -2$$

$$IV.) \quad f'(2) = 32a + 4c = 0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -32a - 4c = 0$$

$$\xrightarrow{Additionsverfahren} -16a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$$



4.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen III

Ein geübter Golfspieler plant, durch einen Abschlag in einem Winkel von 45 ° den Ball direkt in das 120 m entfernte Loch zu spielen.
Nach dem Abschlag beschreibt der Ball eine parabelförmige Flugbahn (Grad n = 2).

a) Wie lautet die Funktionsvorschrift?

Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad und \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$I.)\ f(0) = c = 0 \qquad II.)\ f'(0) = b = 1$$

$$III.)\ f(120) = 14.400a + 120b + c = 0$$

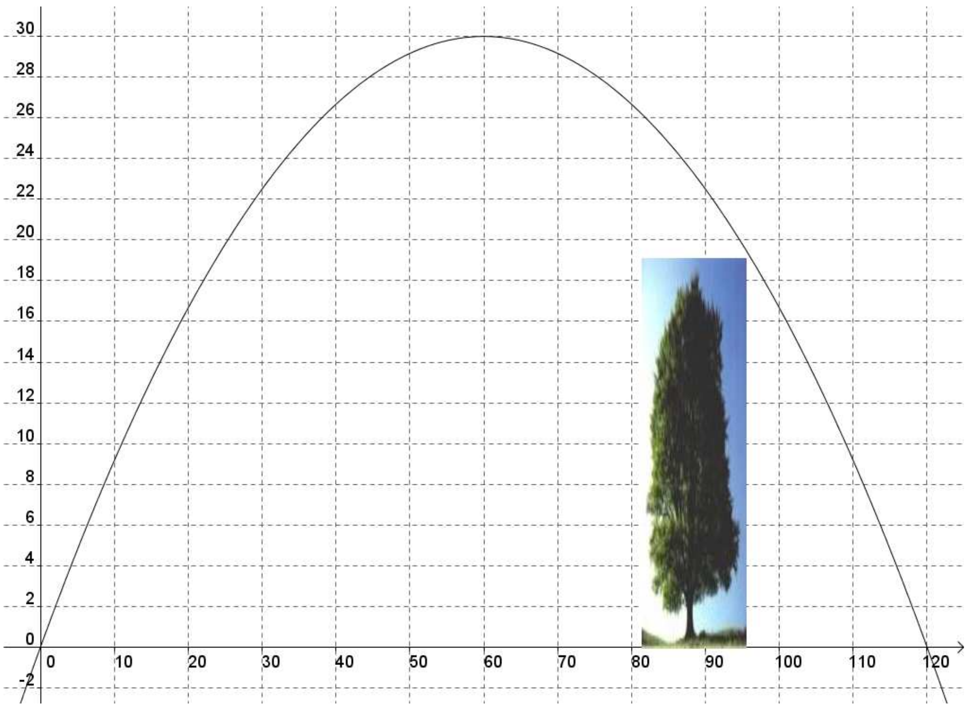
$$\xrightarrow{b=1;\, c=0} 14.400a + 120 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{120} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{120}x^2 + x$$

30 m vor dem Loch steht in direkter Linie zwischen Abschlagplatz und dem Loch ein 20 m hoher Baum.

b) Fliegt der Ball über den Baum?

Lösung: $f(90) = -\frac{1}{120} \cdot 90^2 + 90 = 22{,}50\,[m] > 20\,[m]$

Ja, der Ball wird über den Baum hinwegfliegen.



c) Wie nennt man in der Sprache der Golfer, wenn man das Loch mit nur einem direkten Schlag erzielt?

Lösung: ***Hole in one***

5.) Newton-Iteration

a) Gegeben seien die Funktionen f(x) und g(x) mit den Funktionsvorschriften:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3 \quad und \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$$

Berechnen Sie nun mittels Iteration eine Schnittstelle der beiden Funktionen für die gilt: $x > 0$

Lösung:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}x^3 + 3 = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 4x + 3 \quad und \quad h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 4$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-1.25	-5	0.75
1	0.75	-0.0703125	-4.46875	0.734265
2	0.734265	-0.00021467	-4.441586	0.734217

b) Bestimmen Sie den Wert von $\sqrt[4]{12}$ mit der Newton-Iteration mit geeignetem Startwert in zwei Iterationen.

Lösung: $f(x) = x^4 - 12 \quad und \quad f'(x) = 4x^3$

Startwert: x = 2

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	4	32	1.875
1	1.875	0.3596191	26.367187	1.861361
2	1.861361	0.0039048	25.795972	1.8612097

Startwert: x = 1

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-11	4	3.75
1	3.75	185.7539	210.9375	2.869388
2	2.869389	55.78875	94.49922	2.279026
3	2.279026	14.977255	47.348727	1.9627088
4	1.962708	2.8396448	30.243191	1.8688151

c) Eine Dose (Zylinderform) hat ein Volumen von 4 dm³.
Die Oberfläche misst 25 cm ².

(i) Erstellen Sie die Ansätze zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche.

(ii) Lösen Sie nun den Volumenansatz nach h auf und setzen Sie ihn in den Ansatz der Oberfläche ein.

(iii) Berechnen Sie den Radius mittels Newton-Iteration.

(iv) Begründen Sie, warum dieses Lösungsverfahren hier notwendig ist.

(v) Warum ist es hier sinnvoll, x = 1 oder x = 2 als Startwert zu wählen?

$$V = r^2\pi h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{r^2\pi}$$

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 25 \xrightarrow{h = \frac{4}{r^2\pi}} 25 = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{4}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{8}{r}$$

$$\Rightarrow 2r^2\pi + \frac{8}{r} = 25 \xrightarrow{\cdot r} 2r^3\pi - 25r + 8 = 0$$

Startwert: x = 2

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	8.264	50.396	1.836018
1	1.836018	0.98598933	38.539315	1.810434
2	1.810434	0.02254654	36.780876	1.809821

Startwert: x = 1

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-10.717	-6.151	-0.7423183
1	-0.7423183	23.987931	-14.613513	0.89917139
2	0.89917139	-9.9116170	-9.7604102	-0.1163204
3	-0.11632046	10.898122	-24.744964	0.32409734
4	0.324097	0.1114579	-23.02011	0.328939

Gleichung dritten Grades erfordert ein iteratives Näherungsverfahren als Lösung.

Mit einem geeigneten Startwert wird innerhalb weniger Iterationsschritte ein guter Näherungswert realisiert.