Musterlösung **12. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 30.04.2010**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Matrizen; Determinanten; LGS mit Cramer-Regel und Gauß-Verfahren

---

1.) Bildungsgesetze von Matrizen

Erstellen Sie eine 4x4-Matrix, für deren Elemente folgendes gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 & \text{für } i \geq j \\ 2j - 4i & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & -4 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

2.) Fragestellungen zu Matrizen

a) Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus 2.000 Elementen.

(i) Wie viele Elemente hat die Matrix?

(ii) Wie viele Elemente stehen oberhalb der Hauptdiagonalen?

Lösung: Die Matrix hat 2.000 * 2.000 = 4.000.000 Elemente.

Oberhalb der Hauptdiagonalen stehen

$$\frac{2.000 \cdot 2.000 - 2.000}{2} = 1.999.000 \; Elemente$$

b) Erklären Sie, wann zwei Matrizen gleich sind.

Lösung: Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie das gleiche Format besitzen und an den jeweils gleichen Positionen identische Werte haben.

c) Geben Sie die Werte der Koeffizienten x, y und z an, damit die beiden Matrizen gleich sind.

$$A=\begin{pmatrix} 2x & y+4 \\ 2-y & z^3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3-x & y^2-2y \\ 3 & z^2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Werte der jeweiligen Positionen gleich setzen

$$2x = 3-x \rightarrow x = 1$$
$$2-y = 3 \rightarrow y = -1$$
$$\text{Probe:} \quad y+4 = y^2-2y \xrightarrow{y\ =\ -1} 3 = 3$$
$$z^3 = z^2 \rightarrow z_1 = 1 \vee z_2 = 0$$

3.) Rechnen mit Matrizen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen Matrizen:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$a)\ 3F^2-2D \qquad b)\ F^8$

$c)\ \left(G\cdot D^T\right)^T \qquad d)\ \left(2\cdot D^T+E\right)\cdot\left(G^2-4E\right)^T$

Lösung:

$$a)\ 3F^2-2D = \begin{pmatrix} 23 & 4 \\ 18 & 14 \end{pmatrix} \qquad b)\ F^8 = \begin{pmatrix} 10.233 & 5.474 \\ 10.948 & 7.496 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \left(G\cdot D^T\right)^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -2 & -13 \end{pmatrix} \qquad d)\ \left(2\cdot D^T+E\right)\cdot\left(G^2-4E\right)^T = \begin{pmatrix} 46 & -2 \\ 72 & 26 \end{pmatrix}$$

e) Zeigen Sie anhand der Matrizen F und G, dass die dritte binomische Formel bei der Matrizenrechnung nicht gilt.

Lösung:

$$\textit{linke Seite}:\ (F+G)(F-G) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -21 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\textit{rechte Seite}:\ F^2-G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

f) Gegeben sei nun die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \quad mit\ a \in \Re$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke: H^2, H^3 *und* H^4.

Ermitteln Sie aus Ihren Ergebnissen einen allgemeingültigen Ausdruck für H^n.

Lösung:

$$H^2 = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & -2a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ -2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} \qquad H^3 = \begin{pmatrix} 4a^3 & 0 & -4a^3 \\ 0 & a^3 & 0 \\ -4a^3 & 0 & 4a^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H^4 = \begin{pmatrix} 8a^4 & 0 & -8a^4 \\ 0 & a^4 & 0 \\ -8a^4 & 0 & 8a^4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 0 & -2^{n-1}a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ -2^{n-1}a^n & 0 & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$$

g) In welchen Fällen kann das Matrizenprodukt ***A * B * C***
gebildet werden? Kreuzen Sie an. *Bei „Ja" => Format Ergebnis?*

Nr.	Matrix A	Matrix B	Matrix C	Ja ?	Nein ?	Format
1	(1,3)	(3,2)	(2,2)	X		(1,2)
2	(5,3)	(4,5)	(5,2)		X	
3	(k,4)	(4,k)	(k,k+2)	X		(k,k+2)
4	(4,2)	(4,2)	(2,2)		X	
5	(6,3)	(3,8)	(8,2)	X		(6,2)

h) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen D, G und H.

Lösung:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 13 \qquad \det(G) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\det(H) = \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

4.) Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 1 & 0 & 1 & 8 \\ III.) & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array} \xrightarrow[III.)-I.)]{II.)-I.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 0 & -1 & 1 & 2 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \xrightarrow{II.)-III.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 0 & -1 & 0 & -4 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \xrightarrow[(-1)\cdot II.)]{I.)+II.)}$$

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 4 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 3 & 2 & 1 & 12 \\ II.) & 4 & -5 & -1 & -4 \\ III.) & -2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow[II.)+2\cdot III.)]{I.)+III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & -2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow{III.)+2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & 0 & 7 & 11 & 36 \end{array} \xrightarrow{III.)+2\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & 0 & 1 & 21 & 44 \end{array} \xrightarrow[II.)+3\cdot III.)]{I.)-3\cdot III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -59 & -116 \\ II.) & 0 & 0 & 68 & 136 \\ III.) & 0 & 1 & 21 & 44 \end{array} \xrightarrow[III.)-\frac{21}{68}\cdot II.)]{\frac{1}{68}\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -59 & -116 \\ II.) & 0 & 0 & 1 & 2 \\ III.) & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{I.)+59\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 2 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2a \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>**Lösung:**</u> per Cramer-Regel

$$x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{36a+10}{34a} = \frac{18a+5}{17a}$$

$$y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{31a-15}{34a}$$

$$z = \frac{D_z}{D} \Rightarrow z = \frac{17a-85}{34a} = \frac{a-5}{2a}$$

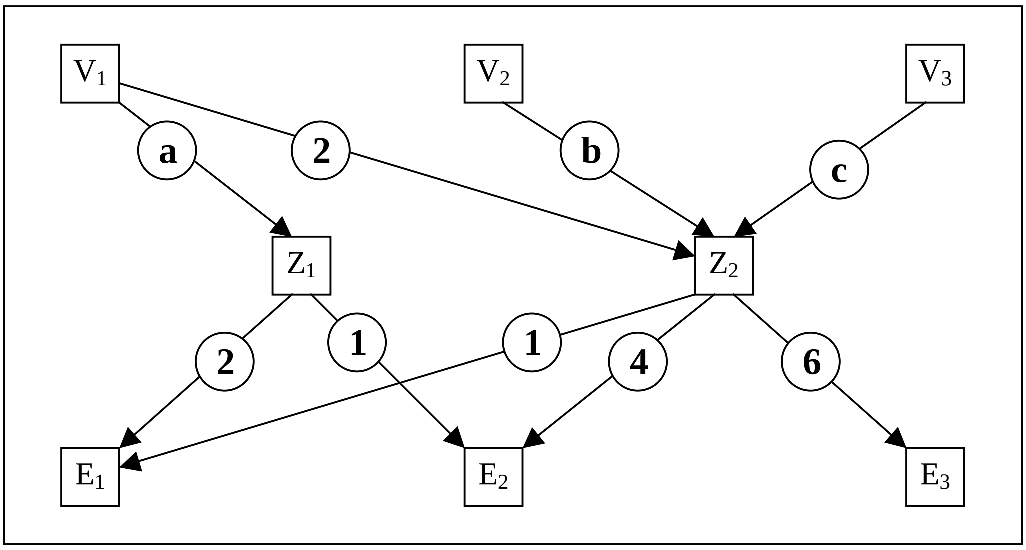
d) Für welche Werte von a hat das LGS von Teilaufgabe c) keine Lösung? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

<u>**Lösung:**</u> Für a = 0 hätte das System keine Lösung, weil dann der Nenner den Wert 0 annehmen würde, während im Zähler von 0 verschiedene Werte entstehen.

5.) Materialberechnungen mit Matrizen

Ein Betrieb fertigt - wie im folgenden Diagramm dargestellt – aus drei Vorprodukten zwei Zwischenprodukte,

und den beiden Zwischenprodukten drei verschiedene Endprodukte.



Die nachfolgende Tabelle gibt jeweils die Gesamtzahl der einzelnen Vorprodukte an, die insgesamt für je ein Endprodukt benötigt werden:

$$M_{VE} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 2 & 8 & 12 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Matrizen M_{VZ} und M_{ZE} und berechnen Sie die entsprechenden Werte a, b und c.

Lösung:

$$M_{VZ} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad und \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll|lll} M_{VZ} \cdot M_{ZE} & & 2 & 1 & 0 \\ & & 1 & 4 & 6 \\ \hline a & 2 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & b & 2 & 8 & 12 \\ 0 & c & 4 & 16 & 24 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad 2a + 2 = 4 \quad und \quad a + 8 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 1$$
$$\rightarrow \quad b = 2 \quad und \quad 4b = 8 \quad und \quad 6b = 12 \quad \rightarrow \quad b = 2$$
$$\rightarrow \quad c = 4 \quad und \quad 4c = 16 \quad und \quad 6c = 24 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

b) Wie groß ist der Bedarf an Vorprodukten bei folgender Bestellung an Endprodukten: 10 ME E_1 , 20 ME E_2 und 15 ME E_3?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 2 & 8 & 12 \\ 4 & 16 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 360 \\ 720 \end{pmatrix}$$