Musterlösung **12. Jgst.** **2. Test** **Datum: 24.11.2009**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Newton-Verfahren; Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen

---

1.) Newton-Iteration

a) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion mittels zweier Iterationen:

$$f(x) = -x^3 + 3x - 3$$

Lösung:

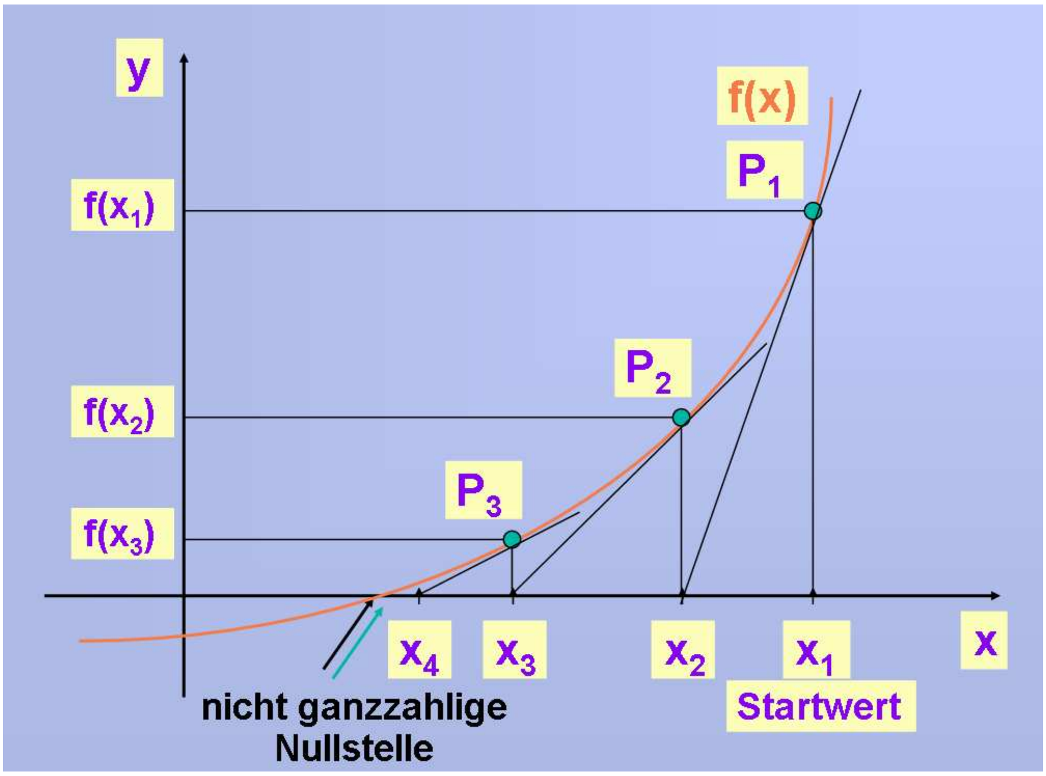
Nullstelle: $x = -2{,}10383$ Startwert: $x = -2$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-2	-1	-9	-2.1111111
1	-2.1111	0.07544581	-10.37037	-2.1038359

b) Erläutern Sie die Herleitung der Formel zur Newton-Iteration (in graphischer und verbaler Form).

Lösung:

Iterationsverfahren zur Bestimmung (nicht – ganzzahliger) Nullstellen von Funktionen



Vorgehensweise:

(1) Startwert x_0 festlegen

(2) Folgewerte mit Formel ermitteln:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad mit \quad f'(x_n) \neq 0$$

c) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit die Iterations-Formel anwendbar ist?

Lösung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad mit \quad f'(x_n) \neq 0$$

d) Wie könnte man den Wert von $\sqrt[3]{10}$ mit der Newton-Iteration bestimmen?

Lösung: Die Nullstelle der Parabel $f(x) = x^3 - 10$ mit dem Newton-Verfahren berechnet würde den Wert $\sqrt[3]{10}$ darstellen.

2.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen

a) Wie viele Bedingungsgleichungen benötigt man, um eine ganzrationale Funktion von Grad 3 eindeutig bestimmen zu können? (mit Begründung!)

Lösung:

Da die allgemeine Funktionsvorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ insgesamt vier zu bestimmende Parameter enthält, müssen auch vier unabhängige Bestimmungsgleichungen existieren.

b) Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung. Die Tangente in P (-3 / 0) ist parallel zur Gerade y = 6x.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad und \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.)\quad f(0) = d = 0$$

$$II.)\quad f'(0) = c = 0$$

$$III.)\quad f(-3) = -27a + 9b - 3c + d = 0$$

$$IV.)\quad f'(-3) = 27a - 6b = 6$$

$$\xrightarrow{b,d \text{ eingesetzt}}$$

$$I.)\quad -27a + 9b = 0$$

$$II.)\quad 27a - 6b = 6$$

$$\xrightarrow{I.)+II.)} 3b = 6 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^3 + 2x^2$$

c) Die folgenden Ansätzen beschreiben eine Funktion 3. Ordnung. Welche Eigenschaften sind hier verwendet bzw. eingesetzt worden?

(1) $f(???) = a+b+c+d = -1$

(2) $f'(???) = 3a+2b+c = 0$

(3) $f(???) = d = -3$

(4) $f'(???) = 3a-2b+c = 0$

(5) $f''(???) = 2b = 0$

Lösung:

$$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x) = 3ax^2+2bx+c \qquad \textit{und} \qquad f''(x) = 6ax+2b$$

(1) $f(1) = a+b+c+d = -1 \Rightarrow P(1 \mid -1)$

(2) $f'(1) = 3a+2b+c = 0$
$\Rightarrow$ *horizontale* Steigung bei x = 1

(3) $f(0) = d = -3 \Rightarrow Q(0 \mid -3)$

(4) $f'(-1) = 3a-2b+c = 0$
$\Rightarrow$ *horizontale* Steigung bei x = -1

(5) $f''(0) = 2b = 0 \Rightarrow$ *Wendestelle* bei x = 0