Musterlösung **12. Jgst.** **4. Test** **Datum: 23.02.2010**

Klasse: GY GS 09-08 **Fach: Mathematik (Grundfach)**

Thema: Integralrechung: Stammfunktion; Flächen unter Randfunktionen

---

1.) Stammfunktionen

Ermitteln Sie die Stammfunktion zu der jeweiligen Funktion f(x):

a) $f(x) = 10x^4 - 3x + 4$

<u>**Lösung:**</u> $F(x) = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$

b) $f(x) = 2a \cdot x^3 - bx^2$

<u>**Lösung:**</u> $F(x) = \frac{1}{2}a \cdot x^4 - \frac{1}{3}b \cdot x^3 + c$

c) $f(x) = 4x^{2n} - 2x^n$

<u>**Lösung:**</u> $F(x) = \frac{4}{2n+1}x^{2n+1} - \frac{2}{n+1}x^{n+1} + c$

d) $f(x) = -\sqrt{x}$

<u>**Lösung:**</u>

$$f(x) = -\sqrt{x} = -x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

ZUSATZ: Integral-Theorie

Folgende Situation liegt vor: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Nennen Sie zwei Fälle, bei denen dieses Integral entstehen kann.

<u>**Lösung:**</u> Fall 1: a = b d.h. Unter- und Obergrenze sind identisch.

Fall 2: Die Fläche unterhalb der x-Achse ist genau so groß wie die Fläche oberhalb der x-Achse, wodurch sich das negative und positive Ergebnis gegenseitig aufheben.

2.) Berechnung von Flächen

Berechnen Sie die Fläche unter der Randfunktion f(x) mit der x-Achse in den vorgegebenen Grenzen:

a) $f(x) = 2x^3 - 16 \qquad [1;3]$

Lösung:

Nullstellen berechnen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

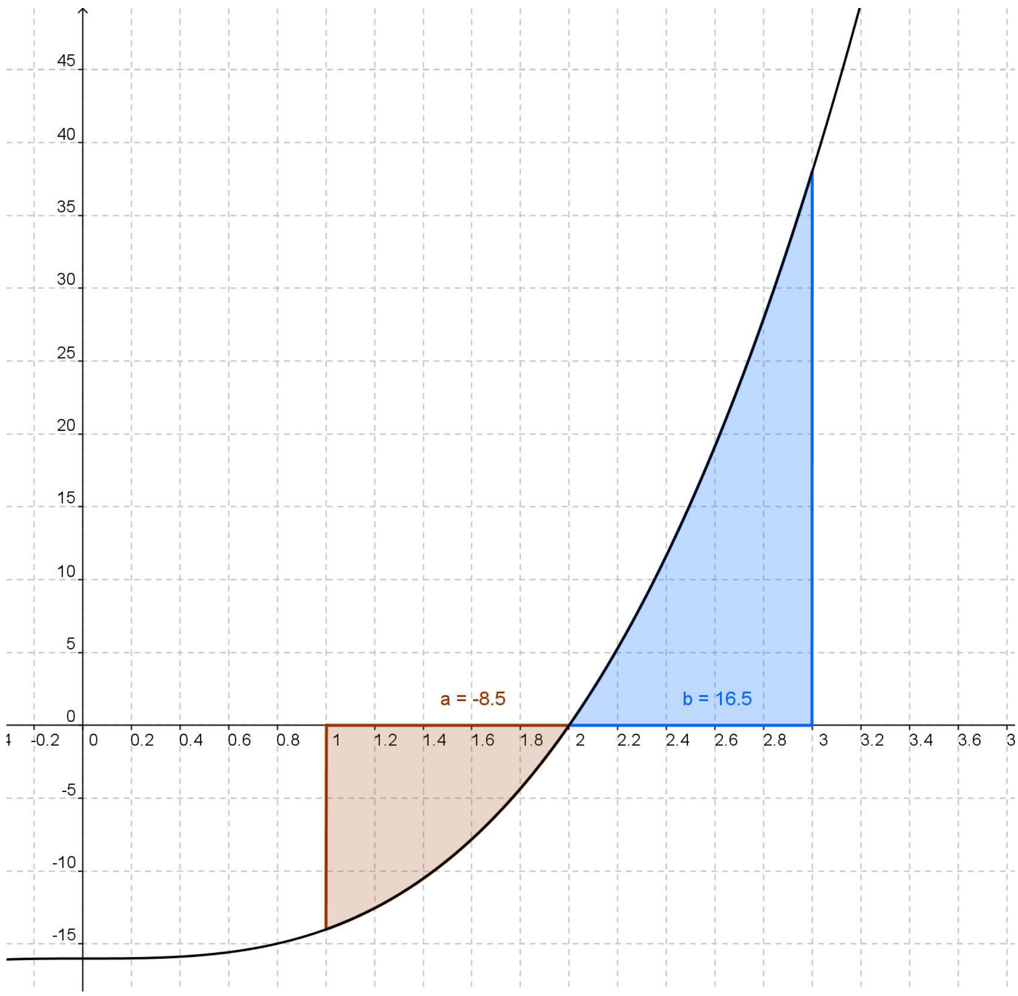
Fläche ermitteln:

$$\left|\int_1^2 (2x^3-16)\,dx\right| + \int_2^3 (2x^3-16)\,dx = \left|\left[\frac{1}{2}x^4 - 16x\right]_1^2\right| + \left[\frac{1}{2}x^4 - 16x\right]_2^3$$

$$= \left|(8-32) - \left(\frac{1}{2} - 16\right)\right| + \left[\left(\frac{81}{2} - 48\right) - (8-32)\right]$$

$$= \left|(-24) - (-15{,}5)\right| + \left[(-7{,}5) - (-24)\right]$$

$$= 8{,}5 + 16{,}5 = 25$$



b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x \qquad [0;2]$

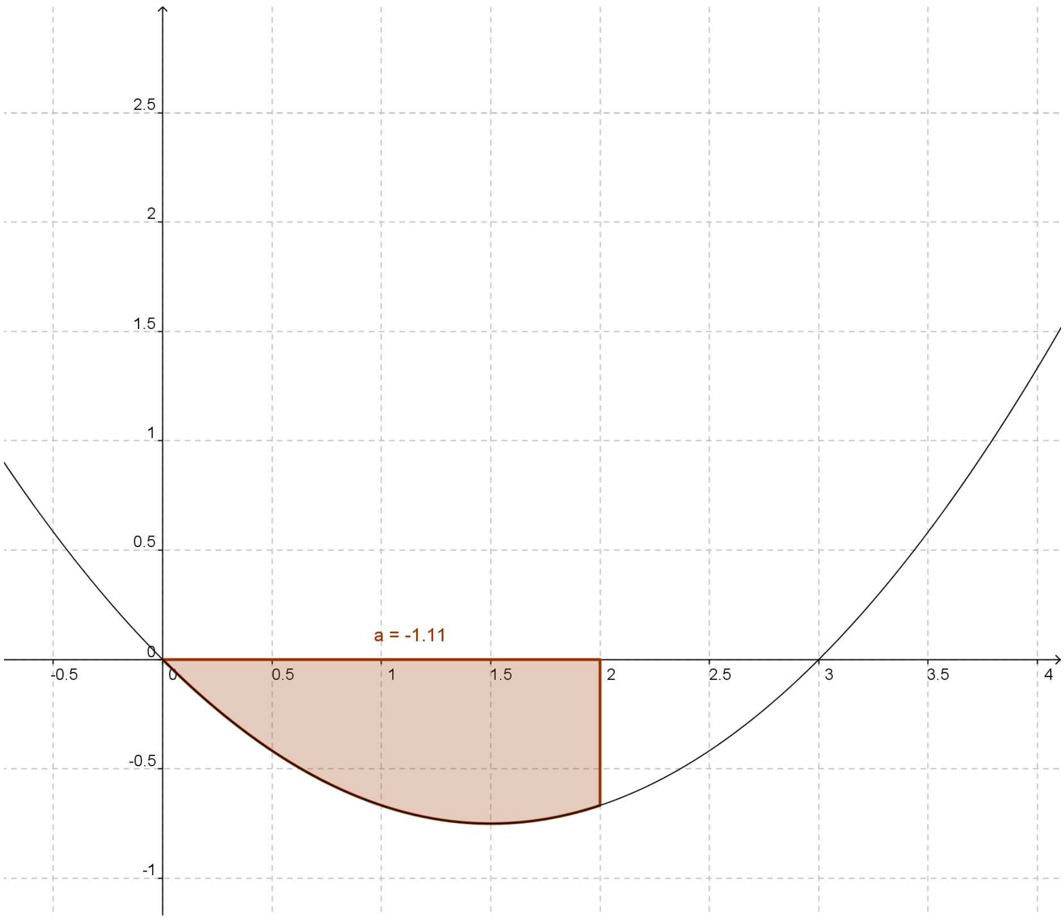
Lösung:

Nullstellen berechnen:

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 3$$

Fläche ermitteln:

$$\left|\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right| = \left|\frac{8}{9} - 2 - 0\right| = \left|\left(-\frac{10}{9}\right)\right| = \left(-\frac{10}{9}\right)$$



3.) Berechnen Sie die Grenze(n)

a) $$\int_a^5 \frac{1}{25} x^3 dx = 6,25$$

Lösung:

$$\int_a^5 \frac{1}{25} x^3 dx = 6,25 \Rightarrow \left[\frac{1}{100} x^4\right]_a^5 = 6,25$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}(625 - a^4) = 6,25 \Rightarrow a = 0$$

b) Bestimmen Sie die Lösung für den Parameter: $\int_t^4 (2x-1)\,dx = 10$

Lösung:

$$\int_t^4 (2x-1)\,dx = 10 \Rightarrow \left[x^2 - x\right]_t^4 = 10$$

$$\Rightarrow 16 - 4 - \left(t^2 - t\right) = 10 \Rightarrow 12 - t^2 + t = 10$$

$$\xrightarrow{-10} -t^2 + t + 2 = 0 \xrightarrow{Lösungsformel} t_1 = -1 \quad und \quad t_2 = 2$$