Musterlösung **11. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 09.06.2010**

Klasse: BGY GS 09 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Themen: **Ganzrat. Fkt.; Kurvendiskussion; Exponentialfunktionen**

1.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

a) Nullstellen

Lösung: $x_1 = -0,73 \wedge x_2 = 1 \wedge x_3 = 2,73$

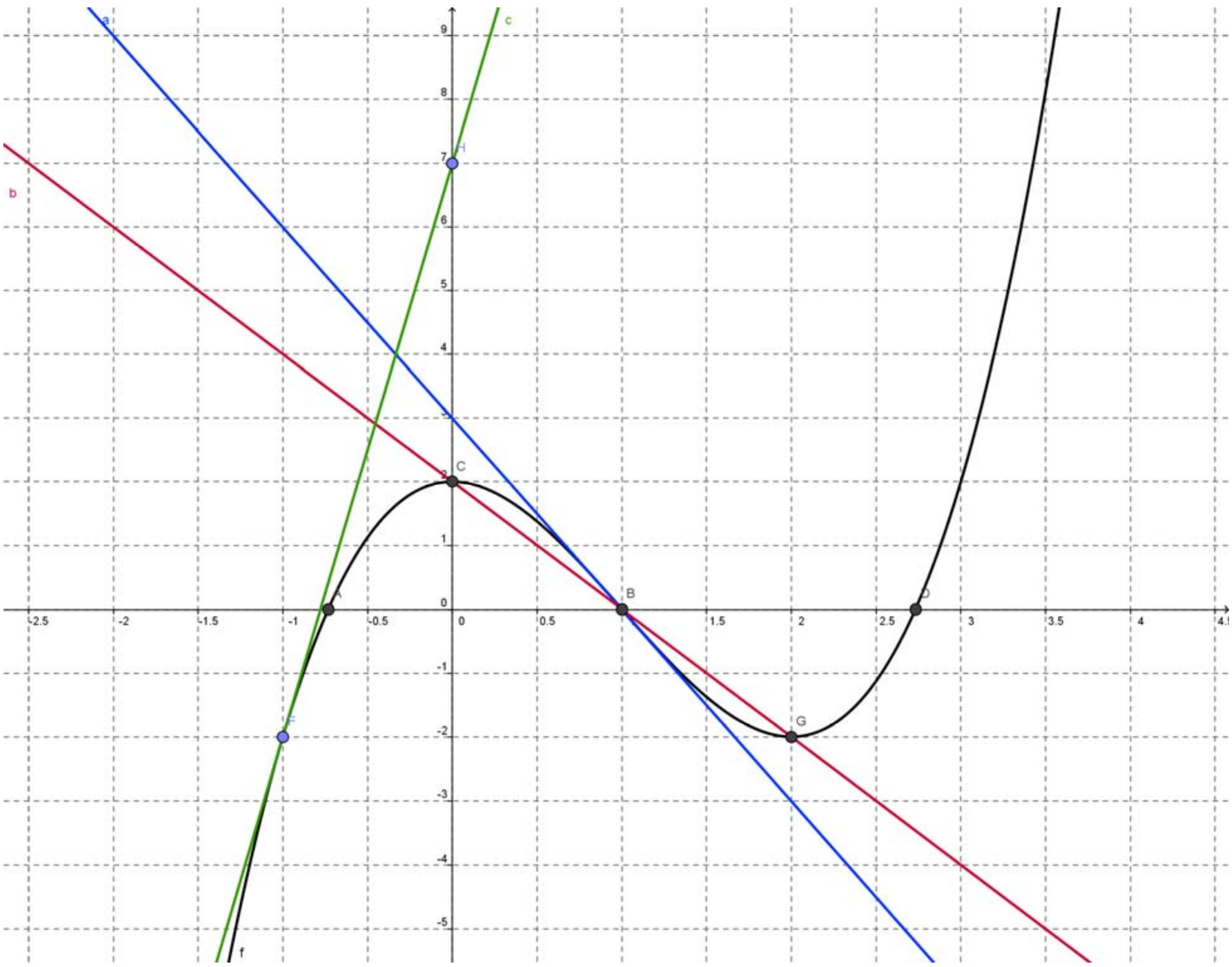
b) Extremwerte

Lösung: $HP(0 \mid 2) \wedge TP(2 \mid -2)$

c) Wendepunkte

Lösung: $WP(1 \mid 0)$

d) Skizze der Funktion



e) Monotonieintervalle

Lösung:

$$I_1 = \left]-\infty ; 0\right[\quad \text{streng monoton steigend}$$
$$I_2 = \left]0 ; 2\right[\quad \text{streng monoton fallend}$$
$$I_3 = \left]2 ; \infty\right[\quad \text{streng monoton steigend}$$

f) Krümmungsintervalle

Lösung:

$$K_1 = \left]-\infty ; 1\right[\quad \text{Probe:} \quad f''(0) = -6 \quad \rightarrow \quad \text{Rechtskrümmung}$$
$$K_2 = \left]1 ; \infty\right[\quad \text{Probe:} \quad f''(2) = 6 \quad \rightarrow \quad \text{Linkskrümmung}$$

g) Bestimmen Sie die Tangente der Funktion an der Stelle x = 1.

Lösung:

$$t(x) = -3x + 3 \quad [= \text{Wendetangente}]$$

h) Zeigen Sie, dass die Extremwerte und der Wendepunkt auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Bestimmen Sie hierbei auch die Geradengleichung.

Lösung:

$$g(x) = -2x + 2 \quad [= \text{Gerade zwischen HP und TP}]$$
$$\textit{Punktprobe Wendepunkt}:$$
$$g(1) = -2 \cdot 1 + 2 = 0$$

i) Die Gerade h verläuft durch den Punkt S (0 / 7) und schneidet die Funktion an der Stelle x = -1.

Zeigen Sie: Die Gerade ist eine Tangente an die Funktion, d.h sie berührt die Funktion an der Stelle x.

Lösung:

$$h(x) = 9x + 7$$
$$\rightarrow \text{Steigung bei x = -1 berechnen}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \rightarrow \quad f'(-1) = 9$$
$$\rightarrow \text{Gerade h(x) ist eine Tangente an die Funktion}$$

2.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter

a) Die Funktion $f_k(x) \;=\; \frac{3}{4}x^4 - 2kx^3$ soll **zwei** Wendepunkte besitzen.

Bestimmen Sie die Wendepunkte in Abhängigkeit von k.

Lösung:

$$f_k''(x) \;=\; 9x^2 - 12kx \;=\; 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \;\wedge\; x_2 = \frac{4}{3}k$$

$$f_k'''(x) \;=\; 18x - 12k \;=\; 0$$

$$\rightarrow\; f_k'''(0) \;=\; -12k \;\neq\; 0 \;\rightarrow\; WP_1(0 \mid 0) \quad mit\ k \neq 0$$

$$\rightarrow\; f_k'''\left(\frac{4}{3}k\right) \;=\; 18 \cdot \frac{4}{3}k - 12k \;=\; 12k \;\neq\; 0$$

$$\rightarrow\; WP_2\left(\frac{4}{3}k \;\middle|\; -\frac{64}{27}k^4\right) \quad mit\ k \neq 0$$

b) Die Funktion $g(x) \;=\; -\frac{1}{6}ax^3 + bx^2$ soll einen Extremwert bei $P\left(2 \;\middle|\; \frac{4}{3}\right)$ besitzen.

(i) Wie sind a und b zu wählen und welche Art von Extremum liegt vor?

(ii) Die Funktion besitzt für b ≠ 0 noch einen weiteren Extremwert. Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extremums.

Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} I.)\ g(2) & = -\frac{4}{3}a + 4b & = \frac{4}{3} \\ II.)\ g'(2) & = -2a + 4b & = 0 \end{array}\right\} \rightarrow\; a = 2 \quad und \quad b = 1$$

$$\rightarrow\; g(x) \;=\; -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

$$\rightarrow\; g'(x) \;=\; -x^2 + 2x \;=\; 0 \;\rightarrow\; x_1 = 2 \quad und \quad x_2 = 0$$

$$\rightarrow\; g''(x) \;=\; -2x + 2 \;\rightarrow\; g''(2) \;=\; -2 \;<\; 0 \;\rightarrow\; HP\left(2 \;\middle|\; \frac{4}{3}\right)$$

Zweiter Extremwert:

$$\rightarrow\; g'(x) \;=\; -x^2 + 2x \;=\; 0 \;\rightarrow\; TP(0 \mid 0)$$

3.) Mathematische Erklärungen und Definitionen

a) Was ist ein Sattelpunkt?

Lösung: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung m = 0.

b) Wie lautet die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt.

Lösung:

$$f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$$

c) Erläutern Sie die beiden möglichen Vorgehensweisen zur Ermittlung eines Extremwertes einer Funktion.

Lösung: Vorgehensweise 1:

$$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$$

$$Fall\,1: \quad f''(x) > 0 \rightarrow Minimum$$

$$Fall\,2: \quad f''(x) < 0 \rightarrow Maximum$$

Vorgehensweise 2:

Untersuchung der Steigung in der Umgebung der Stelle x_0

$$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f'(x \pm \varepsilon) \quad mit\,Vorzeichenwechsel$$

d) Wie viele Extremwerte kann eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 maximal haben? Begründung!

Lösung: Maximal zwei Extremwerte, weil die 1. Ableitung den Grad n = 2 besitzt.

e) Zeigen Sie, dass eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 immer genau einen Wendepunkt besitzt?

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

$$f'''(x) = 6a \neq 0 \rightarrow \text{x ist Wendestelle.}$$

4.) „Absatzprobleme“

Während ihrer umfangreichen Reisetätigkeit mit der Deutschen Bahn AG ist der Ernährungs- und Gesundheitsberaterin Kunigunde Tschieß-Börger aufgefallen, dass ein bemerkenswerter Zusammenhang besteht zwischen der Höhe h (in cm) ihrer Stöckelschuhe und der Wahrscheinlichkeit w(h) dafür, dass sie ihren Reiskoffer selbst vom Bahnsteig zum Taxi tragen muss.

Der funktionale Zusammenhang zwischen w und h kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$w(h) \quad = \quad \frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9 \quad mit \quad h \in [0\,;10]$$

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen, wenn h die Werte der Intervallgrenzen annimmt?

Lösung:

$$w(0) \quad = \quad \frac{1}{100}\cdot 0^2 - 0{,}16\cdot 0 + 0{,}9 \quad = \quad 0{,}9 \quad = \quad 90\,\%$$

$$w(10) \quad = \quad \frac{1}{100}\cdot 10^2 - 0{,}16\cdot 10 + 0{,}9 \quad = \quad 1 - 1{,}6 + 0{,}9 \quad = \quad 0{,}3 \quad = \quad 30\,\%$$

b) Bei welcher Absatzhöhe ist die Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, am kleinsten?

Anmerkung: Berechnen Sie auch hier die Wahrscheinlichkeit und zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt.

Lösung:

$$w'(h) \quad = \quad \frac{1}{50}h - 0{,}16 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad h \quad = \quad 8$$

$$w''(h) \quad = \quad \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad w''(8) \quad = \quad \frac{1}{50} \quad > \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Min(8 \mid 0{,}26)$$

Auf den ersten Blick scheint sich eine Absatzhöhe zu empfehlen, die W minimiert.
Andererseits steigt bei hohen Absätzen der Ärger (ä), der immer dann entsteht, wenn sie den Koffer doch einmal selbst tragen muss: Je höher der Absatz, desto ärgerlicher das eigenhändige Koffertragen.

Die zugehörige Ärgerfunktion lautet daher: $\ddot{a}(h) \quad = \quad \frac{1}{4}h + 1 \quad mit \quad h \in [0\,;10]$

Daraus kann sich Kunigunde nun ihren Gesamtfrust (g) ausrechnen, der sich als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, und dem Ärger ergibt: **g(h) = w(h) * ä(h)**

c) Zeigen Sie, dass der funktionale Ausdruck für g(h) folgende Form annimmt:

$$g(h) = \frac{1}{400}h^3 - \frac{3}{100}h^2 + \frac{13}{200}h + \frac{9}{10}$$

Lösung:

$$w(h) \cdot \ddot{a}(h) = \left(\frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9\right) \cdot \left(\frac{1}{4}h + 1\right)$$

$$= \frac{1}{400}h^3 + \frac{1}{100}h^2 - \frac{4}{100}h^2 - 0{,}16h + \frac{9}{40}h + 0{,}9 = \frac{1}{400}h^3 - \frac{3}{100}h^2 + \frac{13}{200}h + 0{,}9$$

d) Welche Absatzhöhe würden Sie nun Frau Tschieß-Burger zukünftig empfehlen, damit der Gesamtfrust g(h) möglichst gering ausfällt?

Anmerkung: Berechnen Sie auch hier den Gesamtfrust und zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt.

Lösung:

$$g'(h) = \frac{3}{400}h^2 - \frac{6}{100}h + \frac{13}{200} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h_{1/2} = \frac{\frac{6}{100} \pm \sqrt{\frac{36}{10.000} - 4 \cdot \frac{3}{400} \cdot \frac{13}{200}}}{\frac{3}{200}} = \frac{0{,}06 \pm \sqrt{0{,}00165}}{\frac{3}{200}} = \frac{0{,}06 \pm 0{,}04}{\frac{3}{200}}$$

$$\Rightarrow \quad h_1 = 6{,}708 \quad und \quad h_2 = 1{,}292$$

$$g''(h) = \frac{3}{200}h - \frac{6}{100}$$

$$\Rightarrow \quad g''(1{,}292) = \frac{3}{200} \cdot 1{,}292 - \frac{6}{100} < -0{,}0406 \quad \Rightarrow \quad Max$$

$$\Rightarrow \quad g''(6{,}708) = \frac{3}{200} \cdot 6{,}708 - \frac{6}{100} < 0{,}0406 \quad \Rightarrow \quad Min$$

Gesamtfrust:

$$g(6{,}708) = \frac{1}{400} \cdot 6{,}708^3 - \frac{3}{100} \cdot 6{,}708^2 + \frac{13}{200} \cdot 6{,}708 + \frac{9}{10} = 0{,}7407$$

5.) Exponentialfunktionen

Im Jahre 1790 brachte ein englisches Schiff 29 Schafe nach Australien. Die Tiere fanden gute Lebensbedingungen vor und hatten dort keine natürlichen Feinde.

Im Jahr 1950 schätzte man die Zahl der in Australien lebenden Schafe auf 153.000.000.

(i) Wie lautet der Wachstumsfaktor p?

Lösung: $$153.000.000 = 29 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{160} \rightarrow p = 10{,}15$$

(ii) Wann wurde die Millionengrenze überschritten, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt?

Lösung: $$1.000.000 = 29 \cdot 1{,}1015^{t} \rightarrow t = 108\left[Jahre\right]$$

(iii) Wie viele Schafe müssten heute in Australien leben?

Lösung:

$$f(t) = 29 \cdot 1{,}1015^{t}$$

$$\rightarrow f(t) = 29 \cdot 1{,}1015^{220} = 5{,}076 \cdot 10^{10} = 50.763.493.432{,}1$$

Vor kurzem erschien allerdings folgender Artikel:

Australien: Weniger Wolle, mehr Fleisch

Bonn - Die Produktion von Schaffleisch und Wolle ist ein traditioneller Schwerpunkt der australischen Landwirtschaft. Die höchste Anzahl an Schafen besaß Australien im Jahre 1970. Damals wurden 180 Millionen Tiere gezählt, heute sind es dagegen nur noch knapp die Hälfte.

Der Einbruch der Wollpreise auf dem Weltmarkt in den frühen 90er Jahren hatte in Australien eine starke Dezimierung der Schafherden und damit der Wollproduktion zur Folge.
Während sich die Wollproduktion in den letzten 20 Jahren um rund 40 Prozent verringerte, legte die Erzeugung von Lammfleisch im gleichen Zeitraum um über 30 Prozent auf fast 400.000 Tonnen zu.

Australien produziert fast ein Drittel der gesamten Welt-Rohwolle. Die auf dem Kontinent erzeugte Ware von über 450.000 Tonnen geht nahezu vollständig in den Export. Die größten Abnehmer sind China, die EU und Indien.

(iv) Bestimmen Sie die Wachstumsfunktion der Schafpopulation in Australien ausgehend vom Basisjahr 1970 auf der Basis des Artikels.

Lösung:

$$90.000.000 \quad = \quad 180.000.000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{40} \quad \to \quad p \quad = \quad -1,7179$$

(v) Beurteilen Sie aus diesem Beispiel die Aussagekraft von exponentiellen Wachstumsfunktionen bzw. – modellen und machen Sie Vorschläge für eine Verbesserung derartiger Modellannahmen.

Lösung: freie Antwort