Musterlösung **11. Jgst.** **2. Klassenarbeit** **Datum: 11.12.2009**

Klasse: GY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Ganzrat. und gebr.-rationale Funktionen; Linearfaktorzerlegung; Symmetrie**

1.) Nullstellen und Faktordarstellung ganzrationaler Funktionen

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.

a) $f(x) = (x-1)(x^3-8)$

Lösung: $x-1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x^3-8 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

b) $f(x) = x^4-8x^3+15x^2$

Lösung:

$$f(x) = x^4-8x^3+15x^2 = x^2(x^2-8x+15) \Rightarrow x_1 = 0\,[doppelt]$$

$$r(x) = x^2-8x+15 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow x_2 = 5 \quad und \quad x_3 = 3$$

c) $f(x) = x^3-25x$

Lösung:

$$f(x) = x^3-25x = x(x^2-25)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x^2-25 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 \wedge x_3 = -5$$

d) $f(x) = 2x^4+4x^2-2{,}5$

Lösung:

$$2x^4+4x^2-2{,}5 = 0 \xrightarrow{x^2=u} 2u^2+4u-2.5 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4} \Rightarrow u_1 = -\frac{5}{2} \wedge u_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{0{,}5} \wedge x_1 = -\sqrt{0{,}5}$$

e) $f(x) = x^3+6x^2+3x-10$

Horner-Schema:

f(x) =	1,00 x³	6,00 x²	3,00 x	-10,00

x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	6,00	3,00	-10,00	
1		1,00	7,00	10,000	
	1,00	7,00	10,00	0,000	f(x0)

$r(x) = x^2+7x+10 = 0$

$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{-7\pm 3}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \quad und \quad x_3 = -5$

f) $f(x) = x^4-18x^2-32x-15$

Horner-Schema:

f(x) =		1,00	0,00	-18,00	-32,00	-15,00

x0		a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)
		1,00	0,00	-18,00	-32,00	-15,00
-1		0,00	-1,00	1,00	17,00	15,00
		1,00	-1,00	-17,00	-15,00	0,00
-1		0,00	-1,00	2,00	15,00	
		1,00	-2,00	-15,00	0,00	
5		0,00	5,00	15,00		
		1,00	3,00	0,00		
-3		0,00	-3,00			
		1,00	0,00			

$\Rightarrow x_1 = -1[doppelt] \quad und \quad x_2 = 5 \quad und \quad x_3 = -3$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen

Gegeben ist eine gebrochen-rationale Funktion f(x) durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

a) Geben Sie die Zähler- und Nennernullstellen an.

Lösung:

$$Z\ddot{a}hlernullstelle: \quad x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

$$Nennernullstelle: \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

b) Wie lautet die Definitionsmenge der Funktion?

Lösung $D = \Re \setminus \{1\}$

c) Ermitteln Sie das links- und rechtsseitige Verhalten der Funktion in der Umgebung der Definitionslücke.

Welche beiden Grenzwerte entstehen?

$$\lim_{x \to 1^-} f_k(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} \to -\infty \quad und \quad \lim_{x \to 1^+} f_k(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} \to \infty$$

Sei nun $f_k(x) = \frac{x^2+2x}{x-k} \quad mit \quad k \in \Re$.

d) Für welche zwei Werte von k könnte man den Nenner mit einem Teil des Zählers kürzen?

Geben Sie für den jeweiligen k-Wert dann die Ersatzfunktion f*(x) an.

Lösung:

$$k=0: \quad f_0(x) = \frac{x(x+2)}{x} \quad \Rightarrow \quad f_0{}^*(x) = x+2$$

$$k=-2: \quad f_{-2}(x) = \frac{x(x+2)}{x-(-2)} = \frac{x(x+2)}{x+2} \quad \Rightarrow \quad f_{-2}{}^*(x) = x$$

3.) Erstellen ganzrationaler Funktionen

Bilden Sie die ganzrationalen Funktionsgleichungen aus den Angaben:

a) Grad: n = 6; Nullstellen: -1; 3; 7

Lösung:

$$f(x) = (x+1)^a (x-3)^b (x-7)^c \quad mit \quad a+b+c=6$$

$$oder \quad f(x) = (x+1)^a (x-3)^b (x-7)^c \left(x^2+d\right) mit\ d>0 \quad und \quad a+b+c=4$$

b) Koeffizienten: $a_4 = -1$; $a_3 = 3$; $a_2 = 5$; $a_1 = 0$; $a_0 = -2$

Lösung: $f(x) = -x^4+3x^3+5x^2-2$

c) Grad: n = 5; Nullstellen: -5; -3; 2; 8; Koeffizient: $a_5 = 4$

Lösung:

$$f(x) = 4(x+5)^a (x+3)^b (x-2)^c (x-8)^d \quad mit \quad a+b+c+d=5$$

d) Grad: n = 3; Nullstellen: -2; 1; 6; Schnittpunkt y-Achse: $S_y(0 \mid 6)$

Lösung: $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-6) \xrightarrow{a_3=\frac{1}{2}} f(0) = 6$

4.) Aussagenprüfung

Geben Sie an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Jede punktsymmetrische ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

Lösung: **richtig**, denn punktsymmetrisch bedeutet, dass der Grad ungerade ist; ungerade Funktionen wiederum haben mindestens eine Nullstelle.

b) Wenn eine ganzrationale Funktion den Grad n = 5 besitzt, ist sie achsensymmetrisch.

Lösung: **falsch**, achsensymmetrische Funktionen sind gerade, daher muss der Grad auch gerade sein.

c) Bei einer punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion, gilt immer: $a_0 = 0$.

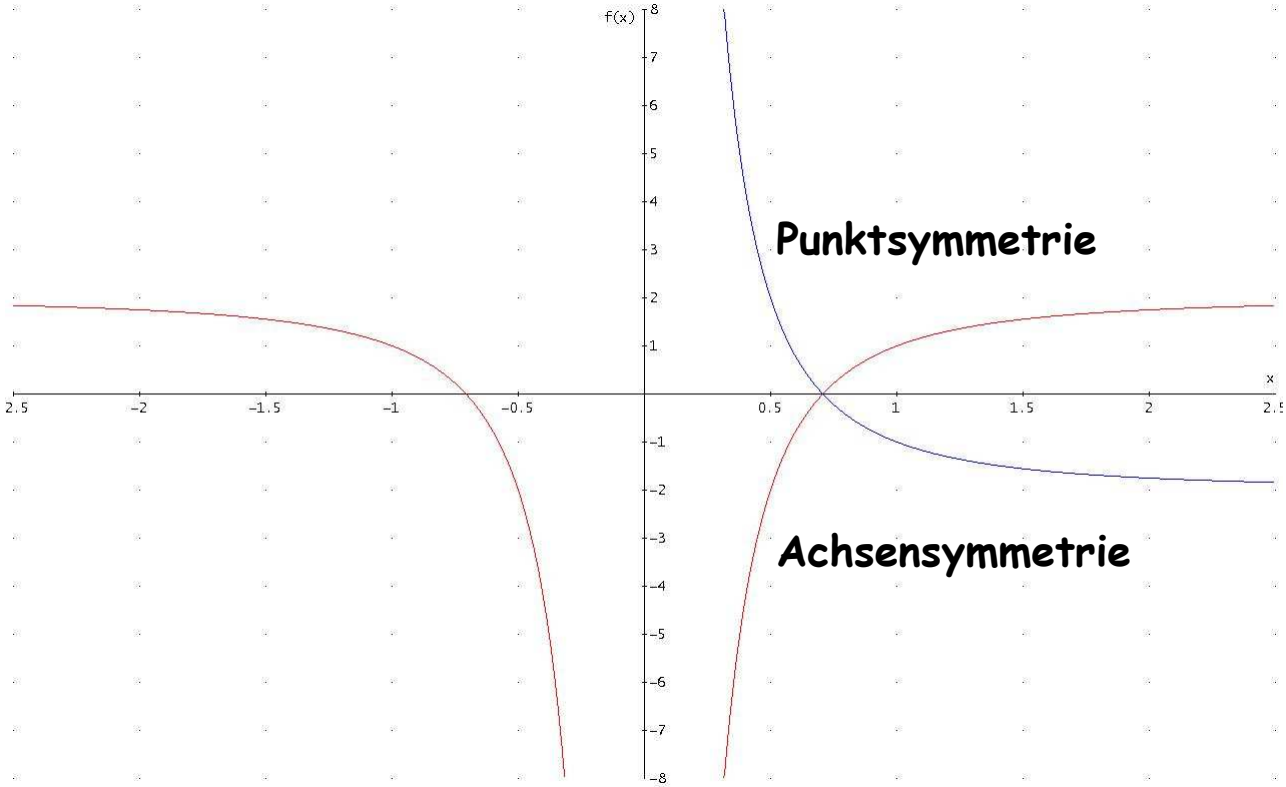
Lösung: **richtig**, denn punktsymmetrisch bedeutet, dass eine ungerade Funktion vorliegt; daher muss der Koeffizient a_0 den Wert 0 annehmen.

d) Wenn eine ganzrationale Funktion eine ungerade Anzahl von Nullstellen besitzt, dann ist die punktsymmetrisch.

Lösung: **falsch**, Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$

5.) Symmetrie

a) Vervollständigen Sie den Graphen der Funktion sowohl als Achsen- als auch als Punktsymmetrie.



b) Beweisen Sie die Symmetrie bei folgenden Funktionen:

(i) $f_k(x) = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 - kx \quad mit \quad k \in \Re$

Lösung:

$$f_k(-x) = \frac{1}{2}(-x)^5 - 2(-x)^3 - k(-x)$$

$$= -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + kx = -f(x)$$

(ii) $g(x) = \frac{1}{2}x^{100} + 5x^{20} - 8x^{10}$

Lösung:

$$g(-x) = \frac{1}{2}(-x)^{100} + 5(-x)^{20} - 8(-x)^{10}$$

$$= \frac{1}{2}x^{100} + 5x^{20} - 8x^{10} = g(x)$$

c) Bilden Sie nun die neue Funktion h(x) mit

$$h(x) = \left[x \cdot f_k(-x)\right]^2 \quad mit \quad k = 0$$

Lösung:

$$h(x) = \left\{x\left[\frac{1}{2}(-x)^5 - 2(-x)^3\right]\right\}^2 = \left(-\frac{1}{2}x^6 + 2x^4\right)^2$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x^{12} - 2x^{10} + 4x^8$$

d) Welche Symmetrieeigenschaft besitzt h(x)?

Nur Begründen – ohne Beweis!

Lösung: h(x) ist achsensymmetrisch, da alle Hochzahlen gerade sind.

e) Begründen Sie die Korrektheit folgender Aussage oder widersprechen der Behauptung, indem Sie ein Gegenbeispiel bilden:

Durch das Multiplizieren von je zwei achsen- oder von je zwei punktsymmetrischen Funktionen miteinander entsteht immer eine achsensymmetrische Funktion.

Lösung: Durch das Multiplizieren werden die Exponenten immer addiert;

Fall 1:

Ausgangsfunktion ist punktsymmetrisch, d.h. alle Exponenten sind ungerade;

=> die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist aber immer gerade

Beweis:

$$2n-1 + 2m-1 = 2n+2m-2 = 2(n+m-1) \quad mit \quad n,m \in Z$$

Diese Zahl ist wegen des Faktors 2 vor der Klammer immer gerade.

Fall 2:

Ausgangsfunktion ist achsensymmetrisch, d.h. alle Exponenten sind gerade;

=> die Summe von zwei geraden Zahlen ist aber immer gerade

Beweis:

$$2n \quad + \quad 2m \quad = \quad 2n+2m \quad = \quad 2\left(n+m\right) \quad mit \quad n,m \in Z$$

Diese Zahl ist wegen des Faktors 2 vor der Klammer immer gerade.

Daher gilt: Die Exponenten der multiplizierten Funktion sind immer gerade und daher ist die Funktion achsensymmetrisch.