Musterlösung **11. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 28.05.2010**

Klasse: BGY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Themen: **Ableitungen; Extremwerte; Wendepunkte; Kurvendiskussion**

1.) Ableitungen I

Bilden Sie von jeder Funktion die **erste und zweite** Ableitung.

a) $f(x) = ax^n + bx^{n+1} + cx^{2-n}$

Lösung:

$$f'(x) = nax^{n-1} + (n+1)bx^n + (2-n)cx^{1-n}$$

$$f''(x) = n(n-1)ax^{n-2} + n(n+1)bx^{n-1} + (1-n)(2-n)cx^{-n}$$

$$f''(x) = n(n-1)ax^{n-2} + n(n+1)bx^{n-1} + \frac{(1-n)(2-n)c}{x^n}$$

b) $f(x) = (3x^2 - 2x)(3 - x^2)$

Lösung:

$$f(x) = (3x^2 - 2x)(3 - x^2) = -3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 6x$$

$$f'(x) = -12x^3 + 6x^2 + 18x - 6 \quad \text{und} \quad f''(x) = -36x^2 + 12x + 18$$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 8x}{x^2}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 8x}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} = 2x - 3 + \frac{8}{x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{16}{x^3}$$

d) $$f(x) = \frac{3x^4 - 12x^2 - 18}{6x^3}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{3x^4 - 12x^2 - 18}{6x^3} = \frac{3x^4}{6x^3} - \frac{12x^2}{6x^3} - \frac{18}{6x^3} = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^4} \quad und \quad f''(x) = -\frac{4}{x^3} - \frac{36}{x^5}$$

e) $$f(x) = \sqrt[4]{x^7}$$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^7} = x^{\frac{7}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3} \quad und \quad f''(x) = \frac{21}{16}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{21}{16\sqrt[4]{x}}$$

2.) Ableitungen II

Bilden Sie von der Funktion die **<u>erste</u>** Ableitung.

$$f(x) = \frac{x^{2n+2} - 3x^{2n} + 2x^{2n-4}}{x^{2n}}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^{2n+2} - 3x^{2n} + 2x^{2n-4}}{x^{2n}} = \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} - \frac{3x^{2n}}{x^{2n}} + \frac{2x^{2n-4}}{x^{2n}}$$

$$f(x) = x^2 - 3 + \frac{2}{x^4}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x^5}$$

3.) Extremwerte

Bestimmen Sie die Extremwerte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 10$

Lösung:

$$f'(x) = 8x - 8 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = 8 \rightarrow f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow TP(1 \mid 6)$$

b) $f(x) = 67{,}5x^2 + x^5$

Lösung:

$$f'(x) = 135x + 5x^4 = 0 \rightarrow x\left(135 + 5x^3\right) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -3$$

$$f''(x) = 135 + 20x^3$$

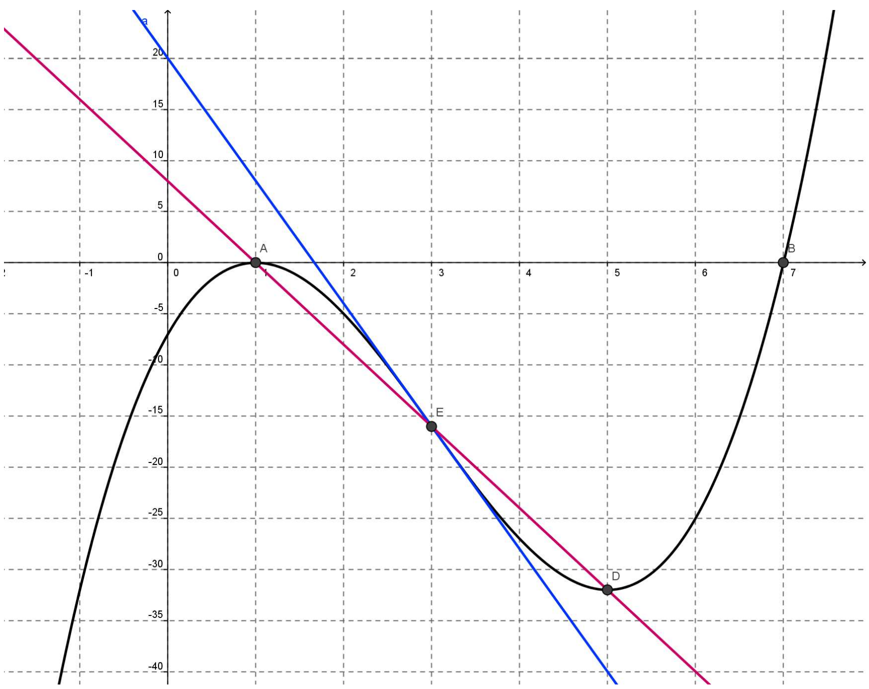
$$\rightarrow f''(0) = 135 > 0 \Rightarrow TP(0 \mid 0)$$

$$\rightarrow f''(-3) = -405 < 0 \Rightarrow HP(-3 \mid 364{,}5)$$

4.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) Skizze der Funktion



a) Nullstellen

Lösung:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{Horner-Schema} x_1 = 1[doppelt] \quad und \quad x_2 = 7$$

b) Extremwerte

Lösung:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6}$$

$$\rightarrow x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = 5$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$$\rightarrow f''(1) = -12 < 0 \Rightarrow HP(1 \mid 0)$$

$$\rightarrow f''(5) = 12 > 0 \Rightarrow TP(5 \mid -32)$$

c) Wendepunkte

Lösung:

$$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(3) = 6 \neq 0 \Rightarrow WP(3 \mid -16)$$

e) Monotonieintervalle

Lösung:

$$I_1 = \,]-\infty; 1[\rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

$$I_2 = \,]1; 5[\rightarrow \text{streng monoton fallend}$$

$$I_3 = \,]5; \infty[\rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

f) Krümmungsintervalle

Lösung:

$$K_1 = \,]-\infty; 3[\xrightarrow{f''(0) = -18 < 0} \text{Rechtskrümmung}$$

$$K_2 = \,]3; \infty[\xrightarrow{f''(4) = 6 > 0} \text{Linkskrümmung}$$

g) Bestimmen Sie die Tangente der Funktion an der Stelle x = 3.

Lösung:

$$\textit{Funktionswert}: \quad f(3) \quad = \quad -16$$

$$\textit{Steigung}: \quad f'(x) \quad = \quad 3x^2 - 18x + 15 \quad \rightarrow \quad f'(3) \quad = \quad -12$$

$$\textit{Achsenabschnitt}: \quad -16 \quad = \quad 3 \cdot (-12) + b \quad \rightarrow \quad b \quad = \quad 20$$

$$\textit{Tangente}: \quad t(x) \quad = \quad -12x + 20$$

h) Zeigen Sie, dass die Extremwerte und der Wendepunkt auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Bestimmen Sie hierbei auch die Geradengleichung.

Lösung:

$$\textit{Steigung} \text{ (zwischen Extrema)}: \quad m \quad = \quad \frac{-32-0}{5-1} \quad = \quad -8$$

$$\textit{Achsenabschnitt}: \quad 0 \quad = \quad (-8) \cdot 1 + b \quad \rightarrow \quad b \quad = \quad 8$$

$$\textit{Gerade}: \quad g(x) \quad = \quad -8x + 8$$

$$\textit{Punktprobe} \text{ (Wendepunkt)}: \quad g(3) \quad = \quad -8 \cdot 3 + 8 \quad = \quad -16$$

5.) Ganzrationale Funktionen mit Parameter

a) Die Funktion $f_k(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3kx^2$ soll **<u>zwei</u>** Wendepunkte besitzen.

(i) Welche Bedingung muss k erfüllen?
(ii) Bestimmen Sie die Wendepunkte in Abhängigkeit von k.

Lösung:

$$f_k'(x) = 2x^3 - 6kx$$
$$f_k''(x) = 6x^2 - 6k = 0 \rightarrow |x| = \sqrt{k} \Rightarrow k > 0$$
$$f_k'''(x) = 12x \rightarrow f_k'''(12\sqrt{k}) \neq 0 \Rightarrow WP_{1/2}\left(\pm\sqrt{k} \;\middle|\; -\frac{5}{2}k^2\right)$$

b) Die Funktion $g(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + bx$ soll einen Extremwert bei P(-2 / 4) besitzen.

Wie sind a und b zu wählen und welche Art von Extremum liegt vor?

Lösung:

$$g(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + bx \quad mit \quad g'(x) = -ax + b \quad und \quad g''(x) = -a$$

$$I.) \quad g(-2) = -\frac{1}{2}a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) = 4 \rightarrow -2a - 2b = 4$$
$$II.) \quad g'(-2) = -a\cdot(-2) + b = 0 \rightarrow 2a + b = 0$$
$$\xrightarrow{I.)+II.)} -b = 4 \rightarrow b = -4 \rightarrow a = 2$$
$$\text{somit gilt:} \quad g(x) = -x^2 - 4x$$

$$g''(x) = -2 < 0 \rightarrow Hochpunkt$$

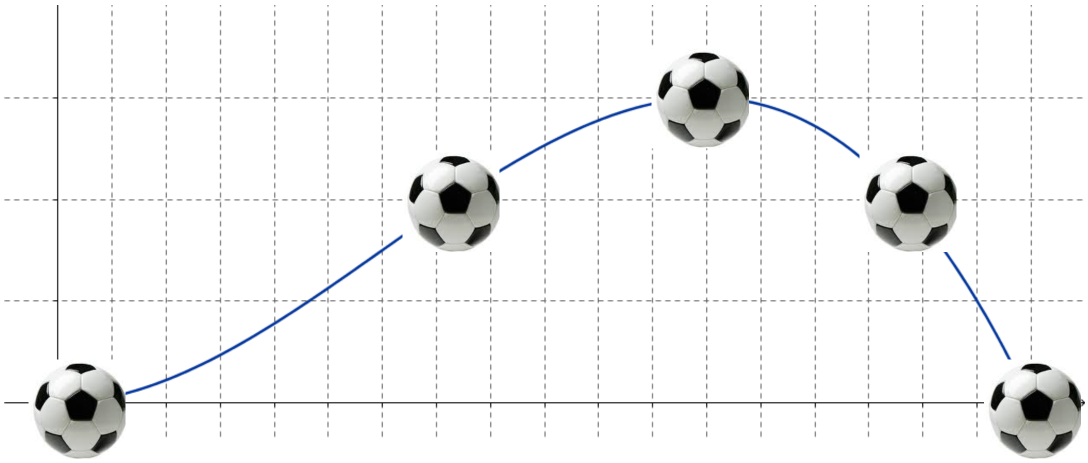
6.) Anwendungsaufgabe

Die Flugkurve eines Balls bei einem Freistoß in einem Fußballspiel lautet:

$$f(x) \quad = \quad -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball während des Fluges?

Lösung:



$$f'(x) \quad = \quad -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x \quad = \quad x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 \quad = \quad 12 \quad \Rightarrow \quad f''(12) \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Max(12 \mid 3)$$

b) Eine Abwehrmauer mit ca. 2m großen Spielern steht genau 9,15 m vom Freistoßpunkt entfernt.

Wird der Ball über diese Spieler fliegen?

Lösung: $f(9{,}15) \quad = \quad 2{,}57$

Trotz eines Durchmessers des Fußballs von ca. 35 cm wird die Höhe der Flugkurve reichen, damit der Ball über die Abwehrmauer fliegt.

c) An welcher Stelle (= Koordinaten) kommt der Ball wieder auf?

Lösung: Nullstelle der Funktion

$$Ansatz: \quad f(x) \quad = \quad -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 0\,[doppelt] \quad und \quad x_2 \quad = \quad \frac{288}{16} \quad = \quad 18$$

Der Ball wird nach 18 m Flug wieder auf dem Rasen aufkommen.