Musterlösung: **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 02.02.2010**

Klasse: GY GS 09 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Differenzenquotient

1.) Polynomdivision

Führen Sie folgende beiden Polynomdivisionen durch:

a) $\left(4x^3-2x^2+4x-6\right):\left(2x-3\right) \quad =$

__Lösung:__

$(4x^3 - 2x^2 + 4x - 6) : (2x - 3) = 2x^2+2x+5$ Rest 9

$4x^3 - 6x^2$

—————————

$4x^2 + 4x - 6$

$4x^2 - 6x$

——————————

$10x - 6$

$10x - 15$

—————

9

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen zieht man auch bei der Polynomdivision vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab, bis am Ende möglichst kein Rest mehr bleibt. Dazu wird in jedem Schritt derjenige Summand des Restes eliminiert, bei dem x in der höchsten Potenz steht.
Die Summanden des Quotienten erhält man daher durch Division dieses Summanden der jeweiligen Reste durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz von x. In diesem Beispiel ist das 2x.
Betrachte den Dividenden 4x^3 - 2x^2 + 4x - 6 als ersten "Rest".
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 4x^3.
Da 4x^3/(2x) = 2x^2, ist der erste Summand des Quotienten 2x^2.
Berechne 2x^2·(2x - 3) = 4x^3 - 6x^2 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 4x^2 + 4x - 6

Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 4x^2.
Da 4x^2/(2x) = 2x, ist der nächste Summand des Quotienten 2x.
Berechne 2x·(2x - 3) = 4x^2 - 6x und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 10x - 6
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 10x.
Da 10x/(2x) = 5, ist der nächste Summand des Quotienten 5.

Berechne 5·(2x - 3) = 10x – 15 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 9

Der Rest hat einen kleineren Polynomgrad (g=0) als der Divisor (g=1) -> Abbruch
Der Quotient wird ergänzt durch den Summanden "Rest/Divisor".

b) $$\left(3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 8\right) : \left(x^3 - 2x\right) \quad =$$

Lösung:

(3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 8) : (x^3 - 2x) = $3x^3 + 2x$ Rest 6x^2 - 8
3x^6 - 6x^4
————————
2x^4 + 2x^2 - 8
2x^4 - 4x^2
——————————
6x^2 - 8

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen zieht man auch bei der Polynomdivision vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab, bis am Ende möglichst kein Rest mehr bleibt. Dazu wird in jedem Schritt derjenige Summand des Restes eliminiert, bei dem x in der höchsten Potenz steht.
Die Summanden des Quotienten erhält man daher durch Division dieses Summanden der jeweiligen Reste durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz von x. In diesem Beispiel ist das x^3.
Betrachte den Dividenden 3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 8 als ersten "Rest".
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 3x^6.
Da 3x^6/(x^3) = 3x^3, ist der erste Summand des Quotienten 3x^3.
Berechne 3x^3·(x^3 - 2x) = 3x^6 - 6x^4 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 2x^4 + 2x^2 - 8

Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 2x^4.
Da 2x^4/(x^3) = 2x, ist der nächste Summand des Quotienten 2x.
Berechne 2x·(x^3 - 2x) = 2x^4 - 4x^2 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 6x^2 - 8

Der Rest hat einen kleineren Polynomgrad (g=2) als der Divisor (g=3) -> Abbruch
Der Quotient wird ergänzt durch den Summanden "Rest/Divisor".

2.) Untersuchung von gebrochen-rationalen Funktionen

Untersuchen Sie die Funktionen nach folgenden Kriterien:
Nullstellen – Polstellen – Lücke – Asymptote – Sy.

Sollte eine Lücke vorliegen, dann ermitteln Sie auch den Grenzwert an der Stelle x_0.

a) $$f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$$

Lösung:

Nullstelle: x = 1,5 Polstelle: x = 4 S_y (0 / 0,75)

Asymptote: a(x) = 2

b) $$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$$

Lösung:

Nullstelle: x = 0 Polstelle: x = 1 S_y (0 / 0)

Asymptote: a(x) = 1

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$f^*(x) = \frac{x}{x-1} \xrightarrow[x\to 2]{\lim} 2$$

=> Lücke: L(2 / 2)

c) $$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1}$$

Lösung:

Nullstellen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$ Polstelle: x = 1 S_y (0 / 6)

Asymptote: a(x) = x Rest: -6

$$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-1}$$

3.) Differenzenquotient

a) Berechnen Sie den Differenzenquotient bei x = 4 bei der Funktion

$f(x) = \frac{1}{4}x^3$ und bestimmen Sie den Wert der Steigung.

x	6	5	4,1	4,01
$f(x) = \frac{1}{4}x^3$	54	31,25	17,23025	16,1203
m_{Sek}	$\frac{54-16}{6-4} = 19$	$\frac{31,25-16}{5-4} = 15,25$	$12,3025$	$12,030025$

x	2	3	3,9	3,99
$f(x) = \frac{1}{4}x^3$	2	6,75	14,82975	15,88029
m_{Sek}	$\frac{2-16}{2-4} = 7$	$\frac{6,75-16}{3-4} = 9,25$	$11,7025$	$11,970025$

Der Wert der Differenzenquotienten strebt gegen den Wert 12.

Es gilt: $$\lim_{x \to 4} m_{Sek}(x) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 16}{x - 4} \rightarrow 12$$

b) Warum sind hier zwei Wertetabellen notwendig?

Lösung: Die Steigung wird durch eine Näherung von links und von rechts berechnet.