Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test (Nachtermin)** **Datum: 11.02.2010**

Klasse: GY GS 09 **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Differenzenquotient; Ableitungen

---

1.) Polynomdivision

Führen Sie folgende beiden Polynomdivisionen durch:

a) $\left(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 6\right):\left(2x - 3\right) \quad =$

<u>**Lösung:**</u> $$2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{4}x + \frac{23}{8} \qquad \text{Rest: } \frac{117}{8}$$

```
(4x^4  - 3x^3  +   2x^2  -   4x  +    6) : (2x - 3)  =
 4x^4  - 6x^3
 ———————————————————————
        3x^3  +   2x^2  -   4x  +    6
        3x^3  -  9/2x^2
        ————————————————————
              13/2x^2  -   4x  +    6
              13/2x^2  - 39/4x
              —————————————————
                       23/4x  +    6
                       23/4x  -  69/8
                       ————————————
                              117/8
```

b) $\left(2x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 5x\right):\left(x^3 + 2\right) \quad =$

<u>**Lösung:**</u> $$2x^2 - 6x + 4 \qquad \text{Rest: } -4x^2 + 7x - 8$$

```
(2x^5  - 6x^4  + 4x^3          -  5x    ) : (x^3 + 2)  =
 2x^5                + 4x^2
 ———————————————————————
      - 6x^4  + 4x^3  - 4x^2  -  5x
      - 6x^4                - 12x
      ————————————————————
              4x^3  - 4x^2  +  7x
              4x^3               + 8
              ———————————————
                   - 4x^2  +  7x  - 8
```

2.) Untersuchung von gebrochen-rationalen Funktionen

Untersuchen Sie die Funktionen nach folgenden Kriterien:
Nullstellen – Polstellen – Lücke – Asymptote – Sy.

Sollte eine Lücke vorliegen, dann ermitteln Sie auch den Grenzwert an der Stelle x_0.

a) $f(x) = \frac{2x+4}{3x-2}$

Lösung:

Nullstelle: x = - 2 Polstelle: $x = \frac{2}{3}$ S_y (0 / - 2)

Asymptote: $a(x) = \frac{2}{3}$ (Zählergrad = Nennergrad)

b) $f(x) = \frac{2x(x^2+x-2)}{x^2-4x+3}$

Lösung:

Nullstelle: x_1 = 0 und x_2 = - 2 Polstelle: x = 3 S_y (0 / 0)

Asymptote: $a(x) = 2x+10 \quad \text{Rest: } 30x-30$ (Polynomdivision)

$$f(x) = \frac{2x(x^2+x-2)}{x^2-4x+3} = \frac{2x(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$f^*(x) = \frac{2x(x+2)}{(x-3)} \xrightarrow[x\to 1]{\lim} -3$$

=> Lücke: L(1 / - 3)

3.) Differenzenquotient

a) Berechnen Sie den Differenzenquotient bei x = 1 bei der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ und bestimmen Sie den Wert der Steigung.

Lösung:

x	3	2	1,1	1,01
$f(x) = 2x^3 - 4x^2$	**18**	**0**	**- 2,178**	**-2,019798**
m_{Sek}	$\frac{18-(-2)}{3-1} = 10$	$\frac{0-(-2)}{2-1} = 2$	$-1,78$	$-1,9798$

Der Wert der Differenzenquotienten strebt gegen den Wert -2.

Es gilt: $$\lim_{x \to 1} m_{Sek}(x) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - (-2)}{x - 1} \rightarrow (-2)$$

b) Was wird mit dem Differenzenquotient berechnet?

Lösung: Mit dem Differenzenquotient wird die Sekantensteigung zwischen zwei Punkten auf der Funktion berechnet. Durch die Verschiebung eines Punktes in Richtung des zweiten Punktes wird aus der Sekante im Grenzfall eine Tangente. Damit entsteht die Steigung der Funktion in der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes.

4.) Ableitung mit der h-Methode

Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ und beweisen Sie Ihre Behauptung mittels der h-Methode und der Anwendung des Differentialquotienten

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+h)^2 - \frac{1}{3}x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$m_{Tan} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

$$m_{Tan} = \frac{1}{3} \cdot 2x = \frac{2}{3}x = f'(x)$$

5.) Ableitungen

Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $\qquad f'(x) = 6x^2 - 8x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^{n+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}(n+1)x^n$

c) $f(x) = \frac{3}{n}x^{2n}$ $\qquad f'(x) = 6x^{2n-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^{n^2+3}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3}(n^2+3)x^{n^2+2}$

e) $f(t) = 4t^2x^3$ $\qquad f'(t) = 8tx^3$