

**Thema: Stetigkeit und Differenzierbarkeit;  
Extrema bei ganzrationalen Funktionen**

---

### 1.) (Un-)Stetigkeit

Geben Sie graphisch ein Beispiel für eine unstetige Funktion an und erklären Sie die Form der Unstetigkeit.

**Lösung:** Beispiele für unstetige Funktionen sind Funktionen, bei denen eine Lücke bzw. eine Sprungstelle vorliegt.

### 2.) Definition und Erklärung

Was versteht man unter Differenzierbarkeit?

**Lösung:** Unter der Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle  $x$  ihres Definitionsbereichs, versteht man, dass die Steigung in  $x$  von links und von rechts angenähert den gleichen Wert besitzt; d.h. der Differentialquotient von links und rechts ist identisch.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

### 3.) Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Gegeben sei die Funktion  $f_{k,t}(x) = \begin{cases} x^2 - kx + t & \text{für } x \leq 1 \\ -x^3 + 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Für welche Werte von  $k$  und  $t$  ist die Funktion  $f_{k,t}(x)$  stetig und differenzierbar?

**Lösung:** Stetigkeit:

$$f_{k,t;1}(1) = f_{k,t;2}(1) \Rightarrow 1 - k + t = -1 + 2 \Rightarrow k = t$$

Differenzierbarkeit

$$f_k'(x) = \begin{cases} 2x^2 - k & \text{für } x \leq 1 \\ -3x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$f_{k;1}'(1) = f_{k;2}'(1) \Rightarrow 2 - k = -3 \Rightarrow k = 5$$

#### 4.) Extremwerte

Bestimmen Sie die Extremwerte der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$$

**Lösung:**

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x=4} f''(4) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{HP}(4 \mid 4)$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$$

**Lösung:**

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} x_1 = \frac{1}{3} \text{ und } x_2 = 3$$

$$f''(x) = 6x - 10 \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} f''\left(\frac{1}{3}\right) = -8 < 0 \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{1}{3} \mid -\frac{14}{27}\right)$$

$$f''(x) = 6x - 10 \xrightarrow{x=3} f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{TP}(3 \mid -10)$$

#### 5.) Nachweis von Extremwerten

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f_k(x)$  für  $k > 0$  bei  $x = k$  einen Extremwert hat. Welche Art von Extremum liegt vor?

$$f_k(x) = 3x^2 - 6kx$$

**Lösung:**

$$f_k'(x) = 6x - 6k = 0 \Rightarrow x = k$$

$$f_k''(x) = 6 \xrightarrow{x=k} f_k''(k) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TP}(k \mid -3k^2)$$