

## 1.) Geometrische Folge

- a) Ermitteln Sie das 20. Glied einer geometrischen Folge, die mit den Gliedern 3; 6; 12 ... beginnt.

Geben Sie auch das Bildungsgesetz an.

**Lösung:**  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1.572.864$

- b) Das erste Glied einer geometrischen Folge heißt  $\frac{2}{3}$ , das letzte  $6.510.416 \frac{2}{3}$  und der Quotient 5.

Aus wie viel Gliedern besteht die Folge?

**Lösung:**  $6.510.416 \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 5^{n-1} \Rightarrow n = 11$

- c) Die Summe aus vier Zahlen, von denen die erste 6 und die vierte 384 heißt und die eine geometrische Folge bilden, beträgt 510.

Ermitteln Sie den Quotienten und das Bildungsgesetz.

**Lösung:**  $384 = 6 \cdot q^{4-1} \Rightarrow q = 4 \Rightarrow a_n = 6 \cdot 4^{n-1}$

- d) Vom wievielten Folgenglied ab sind die Werte der Folge 3; 12; 48 größer als  $10^6$  ?

**Lösung:**

$$3 \cdot 4^{n-1} > 1.000.000 \Rightarrow 4^{n-1} > \frac{1.000.000}{3} \Rightarrow \frac{\ln \frac{1.000.000}{3}}{\ln 4} + 1 < n$$

$$n > 10,17 \Rightarrow n \geq 11$$

## 2.) Geometrische Folge bei Bakterien

Vier Bakterien teilen sich jeweils alle 20 Minuten einmal, wenn sie einen geeigneten Nährboden finden.

a) Füllen Sie die Tabelle zum Bakterienwachstum aus:

<b>Zeit [Min]</b>	<b>0</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>60</b>
<b>Anzahl</b>	4	8	16	32

b) Wie lautet das Bildungsgesetz?

**Lösung:**  $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$

c) Wie viele Zellen haben sich nach 8 Stunden entwickelt?

**Lösung:**  $a_n = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_{25} = 4 \cdot 2^{24} = 67.108.864$

3.) Für Bodenuntersuchungen werden Bohrarbeiten an eine Spezialfirma vergeben, die für den ersten Meter 12,00 € und für jeden weiteren Meter 5 % mehr als für den jeweils vorhergehenden Meter verlangt.

Mit welchen Kosten muss der Auftraggeber **insgesamt** rechnen, wenn 14 m tief gebohrt werden soll?

**Lösung:**  $s_{14} = 12 \cdot \frac{1,05^{14} - 1}{0,05} = 235,18$

4.) Füllen Sie die Tabelle auf Grundlage der ganzjährigen Verzinsung aus:

<b>Aufgabe</b>	<b>Anfangskapital</b>	<b>Zinssatz</b>	<b>Laufzeit</b>	<b>Endkapital</b>
a)	15.000,00	6,5 %	4 Jahre	
b)		4 %	6 Jahre	31.632,98
c)	22.500,00		8 Jahre	35.861,58
d)	12.000,00	8 %		30.218,04

**Lösung:** a)  $K_4 = 15.000,00 \cdot 1,065^4 = 19.297,00$

b)  $K_0 = \frac{31.632,98}{1,04^6} = 25.000,00$

$$c) \quad q = \sqrt[8]{\frac{35.861,58}{22.500,00}} = 1,06 \Rightarrow p = 6,0 [\%]$$

$$d) \quad n = \frac{\ln\left(\frac{30.218,04}{12.000,00}\right)}{\ln 1,08} = 12 [\text{Jahre}]$$

5.) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital, das bei einer vierteljährlichen Zinskapitalisierung mit 8 % p.a. verzinst wird?

**Lösung:**

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{8}{100 \cdot 4}\right)^{4n} \xrightarrow{:K_0} 2 = 1,02^{4n}$$

$$n = \frac{\ln 2}{4 \cdot \ln 1,02} = 8,75 [\text{Jahre}]$$

6.) Frau Kunigunde Halberle hat die Auswahl zwischen folgenden Angeboten:

12.000,00 € Auszahlung sofort oder 22.500,00 € in 10 Jahren  
oder 36.000,00 € Auszahlung in 20 Jahren.

a) Welches Angebot ist für Frau Halberle das beste, wenn man von 6 % ausgeht?

**Lösung:**

Angebot I:	$K_0 = 12.000,00$
Angebot II:	$K_0 = \frac{22.500,00}{1,06^{10}} = 12.563,88$
Angebot III:	$K_0 = \frac{36.000,00}{1,06^{20}} = 11.224,97$

Das Angebot II wäre am besten.

b) Bei welchem Zinssatz wäre die beiden ersten Angebote gleichwertig?

**Lösung:**

$$\frac{22.500,00}{q^{10}} = 12.000,00 \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{22.500,00}{12.000,00}} = 1,0649$$

$$\Rightarrow p = 6,49 [\%]$$

- 7.) Eine Mutter lieh ihrem Sohn für eine Unternehmensgründung einen Kapitalbetrag. 5 Jahre später lieh sie ihm denselben Betrag noch einmal.

3 Jahre nach der zweiten Auszahlung waren die Schulden auf 302.577,47 € angewachsen.

Wie hoch waren die ausgeliehenen Beträge, wenn ein Zinssatz von 7,5 % vereinbart worden war?

**Lösung:**

$$K_0 \cdot 1,075^8 + K_0 \cdot 1,075^3 = 302.577,47$$

$$K_0 \cdot (1,075^8 + 1,075^3) = 302.577,47$$

$$K_0 = \frac{302.577,47}{1,075^8 + 1,075^3} = 100.000,00$$

- 8.) Ein Vater zahlt von der Geburt seines Sohnes an für diesen am Ende eines jeden Jahres 1.500,00 € bei der Zinsreichbank ein.

Welcher Betrag wird dem Sohn nach 18 Jahren ausgezahlt, wenn 4,5 % Zinseszinsen vergütet werden?

**Lösung:**

$$R_{18} = 1.500,00 \cdot \frac{1,045^{18} - 1}{0,045} = 40.282,63$$

- 9.) Welche einmalige Summe ist bei der Rentenanstalt einzuzahlen, um 15 Jahre lang am Schluss eines Kalenderjahres eine Rente von 750,00 € beziehen zu können und man von einem Zinssatz von 5,5 % ausgeht?

**Lösung:**

$$K_0 \cdot 1,055^{15} = 750,00 \cdot \frac{1,055^{15} - 1}{0,055}$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{750,00}{1,055^{15}} \cdot \frac{1,055^{15} - 1}{0,055} = 7.528,19$$

- 10.) Wie oft müssen zu Beginn eines jeden Jahres 600,00 € bei einer Bank einbezahlt werden, damit man bei 4,5 % Zinseszinsen am Ende des letzten Einzahlungsjahres über ein Kapital von 3.430,00 € verfügen kann?

**Lösung:**

$$3.430,00 = 600,00 \cdot 1,045 \cdot \frac{1,045^n - 1}{0,045}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{3.430,00 \cdot 0,045}{600,00 \cdot 1,045} + 1\right)}{\ln 1,045} = 5 [\text{Jahre}]$$

- 11.) Welchen Betrag muss ein Kaufmann zu Beginn eines jeden Jahres bei einer Sparkasse einzahlen, um nach 8 Jahren bei Berechnung von 5,5 % Zinseszinsen über ein Guthaben von 9.743,45 € verfügen zu können?

**Lösung:**

$$9.743,45 = r \cdot 1,055 \cdot \frac{1,055^8 - 1}{0,055} \Rightarrow r = \frac{9.743,45 \cdot 0,055}{1,055 \cdot (1,055^8 - 1)} = 950,00$$

- 12.) Ein Kaufmann erwarb ein an seinen Betrieb angrenzendes zweites Fabrikgebäude. Bei der Übernahme verpflichtet er sich, der bisherigen Inhaberin 20 Jahre lang am Ende des Jahres 10.000,00 € zu überweisen.

Durch welche einmalige Abfindungssumme hätte er sich zum Zeitpunkt der Übernahme der Rentenzahlung entledigen können, wenn man von einem Zinssatz von 5 % ausgeht?

$$R_{20} = 10.000,00 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,05} = 330.659,54$$

**Lösung:**

$$K_0 = \frac{330.659,54}{1,05^{20}} = 124.622,10$$

$$K_0 \cdot 1,05^{20} = 10.000,00 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,05}$$

**Oder:**

$$\Rightarrow K_0 = \frac{10.000,00}{1,05^{20}} \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,05} = 124.622,10$$

13.) a) Welche ewige Rente bringt ein Kapital von 80.000,00 € bei  $p = 6$  [%]?

$$K_0 = \frac{r}{i} \Rightarrow r = K_0 \cdot i$$

*Lösung:*

$$\Rightarrow r = 80.000,00 \cdot 0,06 = 4.800,00$$

b) Welches Kapital ist erforderlich, um bei  $p = 4$  [%] eine ewige Rente von 10.000,00 € beziehen zu können?

*Lösung:*

$$K_0 = \frac{r}{i} \Rightarrow K_0 = \frac{10.000,00}{0,04} = 250.000,00$$