Musterlösung 11. Jgst. 4. Klassenarbeit Datum: 05.05.2008

Klasse: HBF Fach: Mathematik

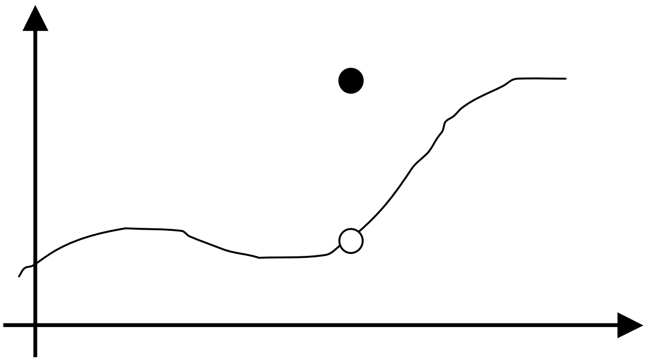
Thema: Stetigkeit; Differentialquotient; Ableitung; Exponentialfunktionen

---

Stetigkeit

1.) Erklären Sie, warum diese beiden Funktionen nicht stetig sind und gegen welchen Teil der Definition der Stetigkeit sie verstoßen.

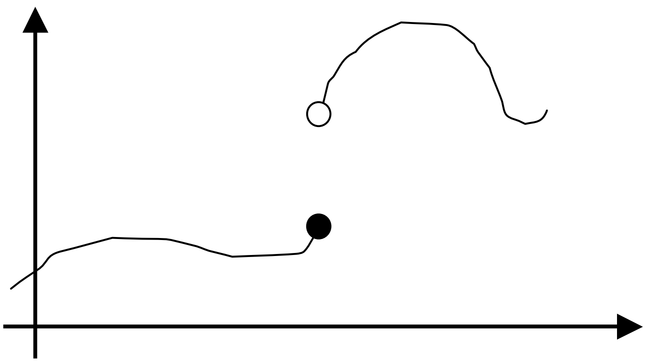
a)



Lösung: links- und rechtseitiger Grenzwert sind identisch, aber der Funktionswert stimmt nicht mit den Grenzwerten überein.

$$\lim_{h \to 0} f\left(x_0 + h\right) = \lim_{h \to 0} f\left(x_0 - h\right) \neq f\left(x_0\right)$$

b)



Lösung: links- und rechtseitiger Grenzwert sind nicht identisch

$$\lim_{h \to 0} f\left(x_0 + h\right) \neq \lim_{h \to 0} f\left(x_0 - h\right) = f\left(x_0\right)$$

2.) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0,25x^4 - 4x & \text{für } x < -2 \\ -x^3 + x^2 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\textit{linke Seite}: \lim_{\substack{x \to -2-h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2-h \\ h \to 0}} \left(0{,}25x^4 - 4x\right) = \lim_{h \to 0} \left[0{,}25(-2-h)^4 - 4(-2-h)\right] = 12$$

$$\textit{rechte Seite}: \lim_{\substack{x \to -2+h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2+h \\ h \to 0}} \left(-x^3 + x^2\right) = \lim_{h \to 0} \left[-(-2+h)^3 + (-2+h)^2\right] = 12$$

$f(x)$ *ist stetig.*

3.) Für welchen Wert von k ist die Funktion stetig?

$$f_k(x) = \begin{cases} 2x^2 - kx & \textit{für } x \le 3 \\ -x^2 + 2x & \textit{für } x > 3 \end{cases}$$

Lösung:

$$\textit{linke Seite}: \lim_{\substack{x \to 3-h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3-h \\ h \to 0}} \left(2x^2 - kx\right) = \lim_{h \to 0} \left[2(3-h)^2 - k(3-h)\right] = 18 - 3k$$

$$\textit{rechte Seite}: \lim_{\substack{x \to 3+h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3+h \\ h \to 0}} \left(-x^2 + 2x\right) = \lim_{h \to 0} \left[-(3+h)^2 + 2(3+h)\right] = -3$$

$$\Rightarrow \quad 18 - 3k = -3 \quad \Rightarrow \quad k = 7$$

Differenzierbarkeit

1.) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ mittels Diff-Quotient.

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{2}(x+h)^2 - \frac{3}{2}x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + 3hx + \frac{3}{2}h^2 - \frac{3}{2}x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(3x + \frac{3}{2}h\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(3x + \frac{3}{2}h\right) = 3x$$

2.) Bilden Sie die Ableitungen $f'(x)$ mittels Potenzregel:

a) $$f(x)=\frac{3}{5}x^3-2x+4 \xrightarrow{Ableitung} f'(x)=\frac{9}{5}x^2-2$$

b) $$f_k(x)=x^4-kx^2+k^2 \xrightarrow{Ableitung} f_k'(x)=4x^3-2kx$$

c) $$f(x)=2x^{2n}-3x^{n+3}+x^{3n-5}$$
$$\xrightarrow{Ableitung} f'(x)=4nx^{2n-1}-3(n+3)x^{n+2}+(3n-5)x^{3n-6}$$

d) $$f(x)=x^3-\frac{3}{x^2} \xrightarrow{Ableitung} f'(x)=3x^2+\frac{6}{x^3}$$

3.) Welche Steigung besitzt die Funktion $f(x)=2x^3-5x^2+3$ an der Stelle x = -3 ?

Lösung:

$$f'(x)=6x^2-10x \xrightarrow{einsetzen} f'(-3)=6\cdot(-3)^2-10\cdot(-3)=84$$

4.) An welchen Stellen hat die Funktion $f(x)=4x^3-12x^2-9x$ die Steigung m = 6?

Lösung:

$$f'(x)=12x^2-24x-9 \xrightarrow{gleichsetzen} 12x^2-24x-9=6$$

$$\Rightarrow \quad 12x^2-24x-15=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-1{,}25=0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4+5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=2{,}5 \quad \wedge \quad x_2=-0{,}5$$

5.) Hier sind nun die Ableitungen gegeben. Bilden Sie die Funktionen $f(x)$.

a) $$f'(x) = x^3 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$$

b) $$f'(x) = 6 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = 6x + c$$

Exponentialfunktionen

1.) Der Punkt P liegt auf der Exponentialkurve $f(x) = a^x$.
Berechnen Sie die Basis a.

$$a) \quad P\left(-2 \;\middle|\; \frac{1}{64}\right) \qquad\qquad b) \quad P(3 \mid 27)$$

Lösung:

$$a) \quad \frac{1}{64} = a^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{64} = \frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad a = 8 \qquad\qquad b) \quad 27 = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

2.) Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein:

Gegeben sei $f(x) = c \cdot a^x$

Dann gilt: $$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

Lösung:

Behauptung: $$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h \qquad mit \qquad f(x) = c \cdot a^x$$

Beweis: $$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{c \cdot a^{x+h}}{c \cdot a^x} = \frac{c \cdot a^x \cdot a^h}{c \cdot a^x} = a^h$$

3.) Landau hatte am 1.1.2007 eine Bevölkerungsanzahl von 43.048.
Das jährliche Wachstum wird mit 2 % veranschlagt.

a) Wie groß ist die Bevölkerungsanzahl im Jahr 2020?

b) Wie groß war die Bevölkerungsanzahl im Jahr 1970?

c) Wann wird Landau die 60.000 Personen-Marke erreicht haben?

d) Angenommen Landau hätte im Jahr 2020 eine Bevölkerungsanzahl von 53.595.
Wie hoch wäre dann der reelle Wachstumsprozentsatz gewesen?

<u>Lösung:</u>

a) $$f(13) = 43.048 \cdot 1{,}02^{13} = 55.687{,}18 \approx 55.687$$

b) $$f(-37) = 43.048 \cdot 1{,}02^{-37} = 20.689{,}34 \approx 20.689$$

$$c) \quad 43.048 \cdot 1{,}02^{x} = 60.000 \xrightarrow{:43.048} 1{,}02^{x} = \frac{60.000}{43.048}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln\left(\frac{60.000}{43.048}\right)}{\ln 1{,}02} \approx 16{,}77 \approx 17\,[Jahre]$$

Im Jahr 2.024 wird Landau etwa 60.000 Einwohner haben.

$$d) \quad 43.048 \cdot a^{13} = 53.595 \xrightarrow{:43.048} a^{13} = \frac{53.595}{43.048}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[13]{\quad}} a = \sqrt[13]{\frac{53.595}{43.048}} \approx \sqrt[13]{1{,}245} \approx 1{,}017$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: $1{,}7\ \%$