Musterlösung 11. Jgst. 4. Klassenarbeit Datum: 08.05.2008

Klasse: HBF DV Fach: Mathematik

Thema: Differentialquotient; Ableitung; Exponentialfunktionen

---

Differenzierbarkeit

1.) Bilden Sie die Ableitungen der Funktionen

a) $f(x) = 4x - 2$ und b) $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ mittels Diff-Quotient.

Lösung: a)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)-2-(4x-2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{4x+4h-2-4x+2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h} = 4$$

Lösung: b)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{2}(x+h)^2-\frac{3}{2}x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+3hx+\frac{3}{2}h^2-\frac{3}{2}x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x+\frac{3}{2}h\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(3x+\frac{3}{2}h\right) = 3x$$

2.) Bilden Sie die Ableitungen $f'(x)$ mittels Potenzregel:

a) $f(x) = \frac{3}{5}x^3 - 2x + 4 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{9}{5}x^2 - 2$

b) $f_k(x) = x^4 - kx^2 + k^2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f_k'(x) = 4x^3 - 2kx$

c) $f(x) = 2x^{2n} - 3x^{n+3} + x^{3n-5}$

$\xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 4nx^{2n-1} - 3(n+3)x^{n+2} + (3n-5)x^{3n-6}$

d) $f(x) = x^3 - \frac{3}{x^2} \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x^3}$

3.) Welche Steigungen besitzen die Funktionen $f(x)$ an den jeweiligen Stellen?

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ für x = -3

Lösung:

$$f'(x) = 6x^2 - 10x \xrightarrow{einsetzen} f'(-3) = 6 \cdot (-3)^2 - 10 \cdot (-3) = 84$$

b) $f(x) = 3x^2 - x + 2$ für x = 2

Lösung:

$$f'(x) = 12x - 1 \xrightarrow{einsetzen} f'(2) = 12 \cdot 2 - 1 = 23$$

4.) An welchen Stellen hat die Funktion $f(x)$ die jeweilige Steigung?

a) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 9x$ mit m = 6

Lösung:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x - 9 \xrightarrow{gleichsetzen} 12x^2 - 24x - 9 = 6$$

$$\Rightarrow \quad 12x^2 - 24x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 1,25 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,5 \quad \wedge \quad x_2 = -0,5$$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3$ mit m = 0

Lösung:

$$f'(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 \xrightarrow{gleichsetzen} x^4 - \frac{2}{3}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \wedge \quad x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

5.) Hier sind nun die Ableitungen gegeben. Bilden Sie die Funktionen $f(x)$.

a) $f'(x) = x^3 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

b) $f'(x) = 0{,}3x^2 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = 0{,}1x^3 + c$

c) $f'(x) = \frac{2}{5}x \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = \frac{1}{5}x^2 + c$

d) $f'(x) = 6 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = 6x + c$

6.) Differenzenquotient

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$

a) Untersuchen Sie das Verhalten des Differenzenquotienten, in dem Sie die Angaben der folgenden Tabelle vervollständigen:

h	x	f(x)	x+h	f(x+h)	Differenzenquotient
1	2	2	3	10,5	$m = \frac{10{,}5-2}{1} = 8{,}5$
0,1	2	2	2,1	2,5305	$m = \frac{2{,}5305-2}{0{,}1} = 5{,}305$
0,01	2	2	2,01	2,0503	$m = \frac{2{,}0503-2}{0{,}01} = 5{,}03$
0,001	2	2	2,001	2,005003	$m = \frac{2{,}005003-2}{0{,}001} = 5{,}003$

b) Was drückt der Differenzenquotient eigentlich genau aus?

Lösung: Der Differenzenquotient drückt die Steigung der Sekante aus:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

c) Mittels Ableitung der Funktion könnten Sie Ihr Ergebnis prüfen?
Führen Sie dies durch und erklären Sie, warum dies mit dem Tabellenwert nahezu übereinstimmt.

Lösung:

Ableitung: $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-1 \xrightarrow{\text{einsetzen}} f'(2) = \frac{3}{2}\cdot 4-1 = 5$

Die Ableitung entsteht durch den Grenzwertübergang von h gegen den Wert Null.

Dadurch wird aus der Sekante eine Tangente und der Grenzwert stellt die gesuchte Steigung der Tangente in einer unendlich kleinen Umgebung des Punktes P(x/f(x)) dar.

Exponentialfunktionen

1.) Der Punkt P liegt auf der Exponentialkurve $f(x)=a^x$.
Berechnen Sie die Basis a.

$a)\quad P\left(-2 \;\middle|\; \frac{1}{64}\right)$ $\qquad$ $b)\quad P(3 \mid 27)$

Lösung:

$a)\quad \frac{1}{64}=a^{-2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{64}=\frac{1}{a^2} \quad\Rightarrow\quad a=8$ $\qquad$ $b)\quad 27=a^3 \quad\Rightarrow\quad a=3$

2.) Von einer Exponentialfunktion $x \to a^x$ weiß man, dass sie um

a) 15 % wächst, b) 8 % abnimmt,

wenn x um eine Einheit zunimmt. Bestimmen Sie die Basis a.

Lösung: a) a = 1,15 b) a = 0,92

3.) Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein:

Gegeben sei $f(x) = c \cdot a^x$

Dann gilt: $$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

Lösung:

Behauptung: $$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h \qquad mit \qquad f(x) = c \cdot a^x$$

Beweis: $$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{c \cdot a^{x+h}}{c \cdot a^x} = \frac{c \cdot a^x \cdot a^h}{c \cdot a^x} = a^h$$

4.) Die Punkte P und Q liegen auf der Exponentialkurve $f(x) = c \cdot a^x$.
Berechnen Sie den Faktor c und die Basis a.

$$P(1 \mid 6) \qquad Q(3 \mid 24)$$

Lösung:

$$I.) \quad 6 = c \cdot a^1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{6}{a} \qquad\qquad II.) \quad 24 = c \cdot a^3$$

$$\Rightarrow \quad 24 = \left(\frac{6}{a}\right) \cdot a^3 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

5.) München hatte zum 1.1.2006 eine Bevölkerungsanzahl von 1.436.180.
Das jährliche Wachstum wird mit 0,75 % veranschlagt.

a) Wie groß ist die Bevölkerungsanzahl am 01.01.2020?

b) Wie groß war die Bevölkerungsanzahl im Jahr 1970?

c) Wann wird München die 1,7 Mio. Personen-Marke erreicht haben?

d) Angenommen München hätte im Jahr 2020 eine Bevölkerungsanzahl von 1.673.829.
Wie hoch wäre dann der reelle Wachstumsprozentsatz gewesen?

__Lösung:__

a) $$f(14) = 1.436.180 \cdot 1{,}0075^{14} = 1.594.555{,}51 \approx 1.594.556$$

b)
$$f(-36) = 1.436.180 \cdot 1{,}0075^{-36} = 1.097.455{,}45 \approx 1.097.455$$

$$c)\quad 1.436.180 \cdot 1{,}0075^{x} = 1.700.000 \xrightarrow{:1.436.180} 1{,}0075^{x} = \frac{1.700.000}{1.436.180}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln\left(\frac{1.700.000}{1.436.180}\right)}{\ln 1{,}0075} \approx 22{,}57 \approx 23\,[Jahre]$$

Im Jahr 2.029 wird München etwa 1.700.000 Einwohner haben.

$$d)\quad 1.436.180 \cdot a^{14} = 1.673.829 \xrightarrow{:1.436.180} a^{14} = \frac{1.673.829}{1.436.180}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[14]{}} a = \sqrt[14]{\frac{1.673.829}{1.436.180}} \approx \sqrt[14]{1{,}16547} \approx 1{,}010998 \approx 1{,}011$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: $1{,}1\,\%$