Musterlösung **11. Jgst.** **2. Test** **Datum: 3.12.2007**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Themen: **Ganz- und gebr.-rat. Funktionen; Horner-Schema; Polynomdivision**

1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende reelle Funktion:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten und begründen Sie.

b) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -1 und x = 2

c) Berechnen Sie die Nullstellen.

d) Wie lautet der Schnittpunkt mit der y-Achse?

e) Geben Sie **<u>zwei Gründe</u>**, warum der Graph unten nicht f(x) sein kann und erstellen die korrekte Skizze der Funktion aufgrund Ihrer obigen Ergebnisse.

Lösung:

a) keine Symmetrie, weil gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

$$f(-x) = (-x)^3 - 5(-x)^2 + 7(-x) - 3$$
$$f(-x) = -x^3 - 5x^2 - 7x - 3 \neq f(x) \; und \neq -f(x)$$

b) Horner-Schema

	f(x) =	1,00 x³	-5,00 x²	7,00 x	-3,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-5,00	7,00	-3,00	
-1		-1,00	6,00	-13,000	
	1,00	-6,00	13,00	-16,000	f(x0)
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-5,00	7,00	-3,00	
2		2,00	-6,00	2,00	
	1,00	-3,00	1,00	-1,000	f(x0)

c) Nullstellen:

Schritt 1: Horner-Schema mit x = 1:

	f(x) =	1,00 x³	-5,00 x²	7,00 x	-3,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-5,00	7,00	-3,00	
1		1,00	-4,00	3,000	
	1,00	-4,00	3,00	0,000	f(x0)

Schritt 2: Lösung des quadratischen Restterms:

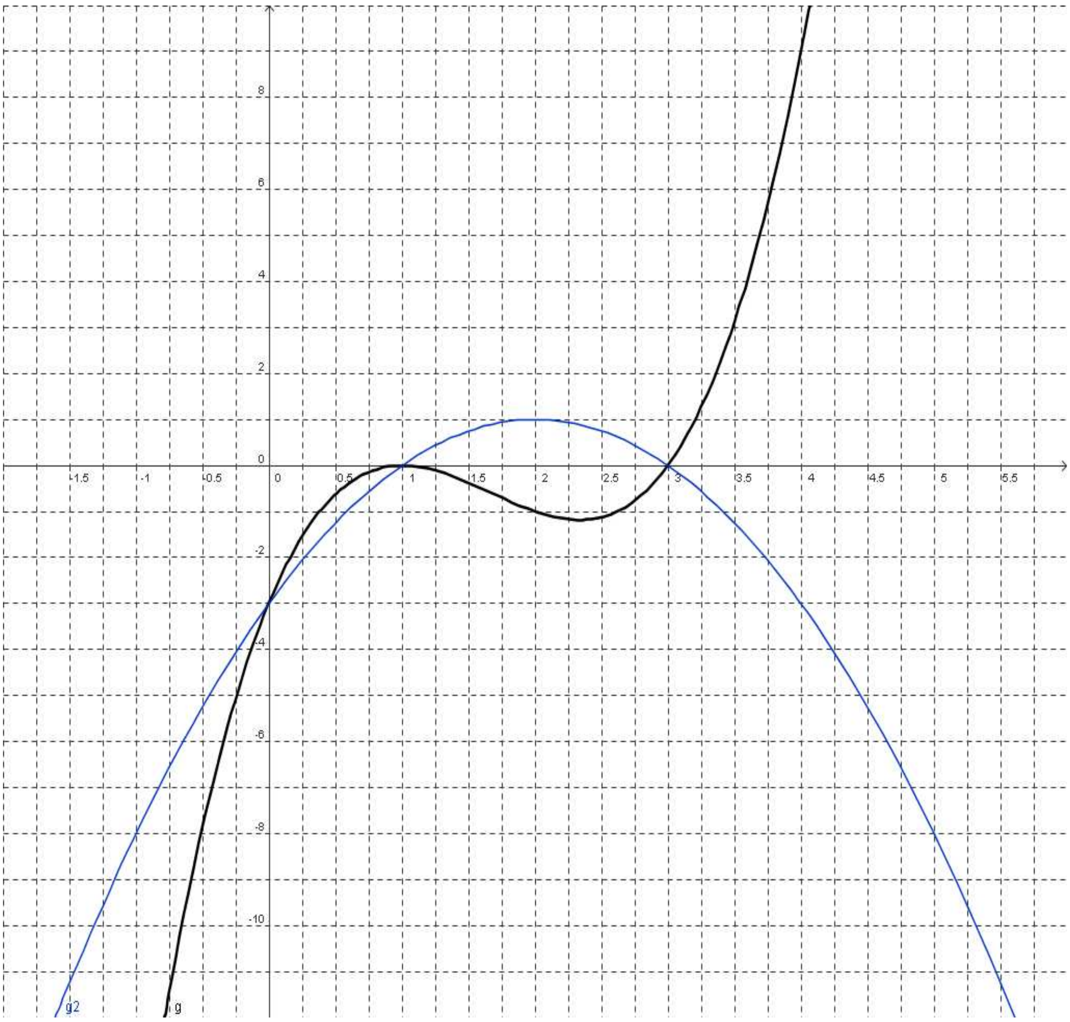
$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \wedge x_3 = 3$$

$$Ergebnis: \quad f(x) = (x-1)^2 (x-3)$$

d) $S_y(0 \mid -3)$

e) (i) x = 1 ist keine doppelte Nullstelle.

(ii) Der Ausschnitt deutet auf eine quadratische Funktion hin.



2.) Ermitteln einer ganzrationalen Funktion vom Grad n = 2

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer quadratischen Funktion

deren Graph durch die gegebenen Punkte verläuft:

$$A(-2 \mid 0), B(2 \mid 4) \quad und \quad C(3 \mid 10)$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & 4a-2b+c=0 \\ II.) & 4a+2b+c=4 \\ III.) & 9a+3b+c=10 \end{array}\right\} \xrightarrow{I.)-II.)} b=1 \xrightarrow[b=1]{III.)-II.)} a=1 \Rightarrow c=-2$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=x^2+x-2$$

3.) Parameter bei höhergradigen Funktionen

Die Funktion f(x) sei gegeben mit:

$$f(x) \quad = \quad -2(x-a)(x-b)(x-c)$$

Wie lauten die Werte für a, b und c, wenn folgende Angabe existiert:

(i) a ist dreimal so groß wie b.

(ii) $f(x) \quad = \quad \left(-2x^2+16x-24\right)(x-2)$

Lösung:

$$f(x) \quad = \quad -2(x-a)(x-b)(x-c) \quad = \quad -2\left(x^2-ax-bx+ab\right)(x-c)$$

$$Es\ gilt: \quad f(x) \quad = \quad -2\left(x^2-8x+12\right)(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad c=2 \quad und \quad \Rightarrow \quad a+b=8 \quad \wedge \quad ab=12 \quad \Rightarrow \quad a=6 \quad \wedge \quad b=2$$

4.) Polynomdivision

Führen Sie bei den beiden Funktionen eine Polynomdivision durch:

a) $$g(x)=\frac{x^2+5x-6}{x-2}$$

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^2+5x-6\right):\left(x-2\right) \quad = \quad x+7+\dfrac{8}{x-2} \\
\underline{-\left(x^2-2x\right)} \\
\qquad 7x-6 \\
\qquad \underline{-\left(7x-14\right)} \\
\qquad\qquad 8
\end{array}
$$

b) $$g(x)=\frac{4x^5-5x^4+2x^3-x^2+6x}{x^2+1}$$

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
\left(4x^5-5x^4+2x^3-x^2+6x\right):\left(x^2+1\right) \quad = \quad 4x^3-5x^2-2x+4+\dfrac{8x-4}{x^2+1} \\
\underline{-\left(4x^5 \qquad +4x^3\right)} \\
\quad -5x^4-2x^3 \\
\quad \underline{-\left(-5x^4 \qquad -5x^2\right)} \\
\qquad -2x^3+4x^2 \\
\qquad \underline{-\left(-2x^3 \qquad -2x\right)} \\
\qquad\quad 4x^2+8x \\
\qquad\quad \underline{-\left(4x^2 \qquad +4\right)} \\
\qquad\qquad 8x-4
\end{array}
$$

c) Zu welchem Zweck wird die Polynomdivision bei gebrochen-rationalen Funktionen durchgeführt?

Lösung: Ermittlung der Asymptote

5.) Zuordnung: Funktion - Graph

Gegeben seien drei Funktionsvorschriften f1 bis f3 und ein Graph.

$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4} \qquad f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4} \qquad f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$

Zu welcher der drei Funktionsvorschriften passt der Graph?

=> ***Begründen Sie die Entscheidung aufgrund der Nullstellen, der Asymptote und der und Polstellen!***

=> ***Ergänzen Sie zudem noch die Asymptote und die Polstelle (Polgerade).***

Lösung:

Kriterium	$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4}$	$f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4}$	$f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$
Asymptote	a(x) = - 2	**a(x) = 2**	a(x) = - 2
Nullstellen	x = 0,5	**x = - 0,5**	x = 0,5
Polstelle(n)	x = 2	**x = 2**	x = - 2
Schnitt y-Achse	$S_y(0 \mid -0,5)$	$S_y(0 \mid -0,5)$	$S_y(0 \mid 0,5)$