

1.) Untersuchung gebr.-rat. Funktionen

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{-2x-9}{x-3}$

- a) Berechnen Sie den Grenzwert für $x \rightarrow 3$ mittels geeigneter Näherungswerte von beiden Seiten.

Lösung: Wertetabelle

x	2,9	2,99	2,999		3,1	3,01	3,001
f(x)	148	1.498	14.998		- 152	- 1.502	- 15.002

von links: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x-9}{x-3} \rightarrow \infty$

von rechts: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x-9}{x-3} \rightarrow -\infty$

- b) Wie lautet der Definitionsbereich?

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- c) Warum muss der Grenzwert bei der Funktion nur für $x \rightarrow 3$ untersucht werden und nicht auch für andere Werte?

Lösung: Die Untersuchung muss nur für $x \rightarrow 3$ durchgeführt werden, weil nur dann der Nenner den Wert 0 annehmen könnte.

- d) Wie lautet der Grenzwert für $x \rightarrow \infty$?
Bitte geben Sie auch eine Begründung an.

Lösung: Da Zählergrad = Nennergrad vorliegt, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-9}{x-3} \rightarrow -2$$

- e) Berechnen Sie die Nullstelle und den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lösung: Nullstelle: $\frac{-2x-9}{x-3} = 0 \Rightarrow x = -4,5$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{(-2) \cdot 0 - 9}{0 - 3} = 3 \Rightarrow S_y(0 | 3)$

2.) Funktion zeichnen

Zeichnen Sie eine gebr.-rat. Funktion mit folgenden Eigenschaften:

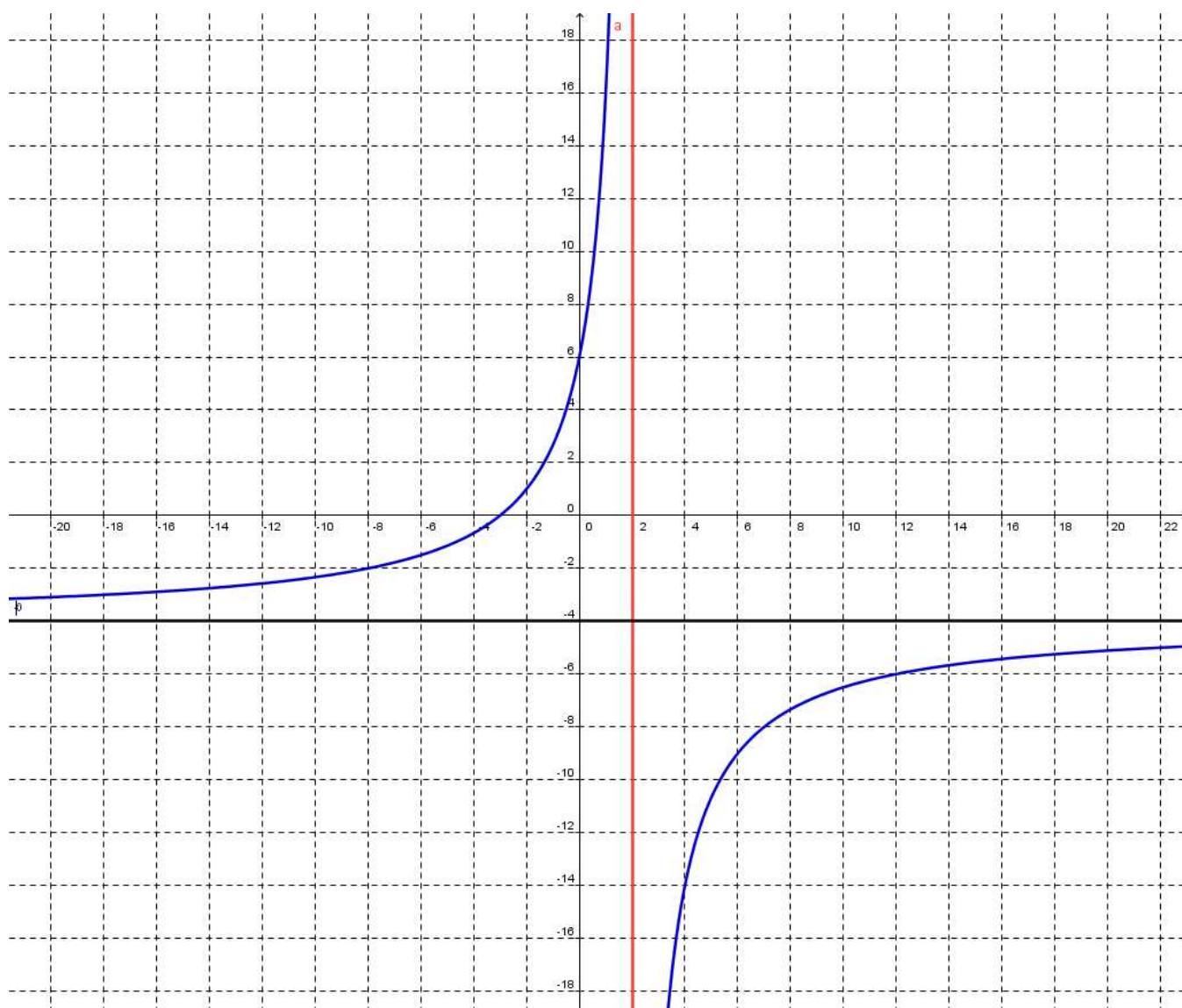
a) Nullstelle: $x = -3$

b) $S_y(0 | 6)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \infty$ [von links]

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow -\infty$ [von rechts]



3.) Berechnung von Grenzwerten mittels Termumformung

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x(x^2 - 144)}{2x - 24} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x(x-12)(x+12)}{2(x-12)} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x(x+12)}{2} \rightarrow 144$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^4 - 64x^2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2(x^2 - 16)}{x - 4}$$

$$\text{b)} \quad = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} 4x^2(x+4) \rightarrow 512$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{x - 3}$$

$$\text{d)} \quad = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(x^2+9) \rightarrow 108$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x-3)(x+5)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-3) \rightarrow -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 4x - 48}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2(x^2 - 2x - 24)}{x - 6}$$

$$\text{f)} \quad = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2(x-6)(x+4)}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} 2(x+4) \rightarrow 20$$

4.) Berechnung von Grenzwerten für $x \rightarrow \infty$ (Begründung!)

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,001x^5 - 4x}{2(x-1)^2}$$

Lösung: Zählergrad > Nennergrad $\Rightarrow$ Grenzwert: ∞

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 5x)^2}{6x^2 \cdot (3x^2 - 4)}$$

Lösung: Zählergrad = Nennergrad $\Rightarrow$ Grenzwert: $\frac{16}{18} = \frac{8}{9} \approx 0,888$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^2 - 4}$$

Lösung: Zählergrad < Nennergrad $\Rightarrow$ Grenzwert: 0

5.) Rekonstruktion einer gebr.-rat. Funktionen

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Welche Werte müssen für a , b und c eingesetzt werden, damit die Funktion bei $x = 4$ eine Nullstelle und den Definitionsbereich

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ besitzt?

$$f(x) = \frac{x-4}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-4}{x^2-x-2}$$

Lösung:

$$\Rightarrow a = -4 \quad b = -1 \quad c = -2$$

6.) Polynomdivision

Führen Sie bei den beiden Funktionen eine Polynomdivision durch:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x + 6}$$

Lösung:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x + 6) = x^2 - 11x + 68 - \frac{400}{x + 6} \\ \underline{-x^3 - 6x^2} \\ -11x^2 + 2x \\ \underline{11x^2 + 66x} \\ 68x + 8 \\ \underline{-68x - 408} \\ -400 \end{array}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{x - 2}$$

Lösung:

$$\begin{array}{r} (2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4x - 1) : (x - 2) = 2x^3 - 4x^2 - 6x - 16 - \frac{33}{x - 2} \\ \underline{-2x^3 + 4x^3} \\ -4x^3 + 2x^2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -6x^2 - 4x \\ \underline{6x^2 - 12x} \\ -16x - 1 \\ \underline{16x - 32} \\ -33 \end{array}$$

7.) Zuordnung

Ordnen Sie den Schaubildern die Funktionsvorschriften zu und begründen Sie Ihre Entscheidung ausführlich:

$$1.) \quad f(x) = \frac{3x+9}{x+2} \qquad 2.) \quad f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$$

$$3.) \quad f(x) = \frac{3x+9}{x-2} \qquad 4.) \quad f(x) = \frac{2x-4}{x+2}$$

Lösung:

Graph A entspricht Funktion 4: Asymptote bei $y = 2$; Pol bei $x = -2$

Graph B entspricht Funktion 3: Asymptote bei $y = 3$; Pol bei $x = 2$

Graph C entspricht Funktion 1: Asymptote bei $y = 3$; Pol bei $x = -2$

Graph D entspricht Funktion 2: Ausklammern und kürzen nach entsprechender

$$\text{Termumformung} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-4}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} = 2 \quad \text{mit } D \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

