Musterlösung **12. Jgst.** **2. Klassenarbeit** **Datum: 08.12.2009**

Klasse: HBFHE **Fach: Mathematik**

Thema: Newton-Iteration; Extremwertaufgaben; Ableitungen

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f_t(x) = \left(x^2+3tx-4\right)^{10}$$

Lösung: $$f_t'(x) = 10\left(x^2+3tx-4\right)^9(2x+3t)$$

b) $$f_t(x) = \frac{3x^2+xt}{x+2}$$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{(6x+t)(x+2)-\left(3x^2+xt\right)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{6x^2+12x+tx+2t-3x^2-xt}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x+2t}{(x+2)^2}$$

c) $$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4-2x^3\right)(2x-1)$$

Lösung:

$$f'(x) = \left(2x^3-6x^2\right)(2x-1)+\left(\frac{1}{2}x^4-2x^3\right)\cdot 2$$

$$f'(x) = 4x^4-2x^3-12x^3+6x^2+x^4-4x^3 = 5x^4-18x^3+6x^2$$

d) $$f(x) = \left(2x^2-2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^3-4x^2\right)^5$$

Lösung:

$$f'(x) = 4x\cdot\left(\frac{1}{4}x^3-4x^2\right)^5+5\left(2x^2-2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^3-4x^2\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}x^2-8x\right)$$

2.) **Newton-Iteration**

a) Bestimmen Sie die Nullstelle bei folgender Funktion

$$f(x) = x^3 - 10$$

indem Sie zwei Iterationsschritte mit einem geeigneten Startwert durchführen.

Lösung: $f(x) = x^3 - 10$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2$

Startwert: x = 2

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**2**	-2	12	2.166666
1	2.16666	0.17129629	14.083333	2.1545036
2	2.1545036	0.00095980	13.925657	2.1544346

Startwert: x = 3

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**3**	17	27	2.370370
1	2.370370	3.318294975	16.8559670	2.1735086
2	2.1735086	0.267958580	14.17241932	2.1546015

b) Gegeben seien die Funktionen f(x) und g(x) mit den Funktionsvorschriften:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 1 \quad und \quad g(x) = x^2 - 4x$$

Berechnen Sie nun mittels Iteration eine Schnittstelle der beiden Funktionen für die gilt: $x > 0$

Lösung:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}x^3 + 1 = x^2 - 4x$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 4x + 1 \quad und \quad h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**2**	**1**	**-6**	**2.16666**
1	**2.16666**	**-0.11342592**	**-7.375**	**2.15128**
2	**2.151286**	**-0.001003466**	**-7.2446266**	**2.15114836**

3.) Extremwertaufgabe I

Der Ausdruck 4x + 2y zweier Zahlen beträgt 250.

Bestimmen Sie die beiden Zahlen, so dass deren Produkt maximal wird.

Lösung:

$$Zielfunktion: \quad f(x,y) = x \cdot y$$

$$Nebenbedingung: \quad 250 = 4x + 2y \Rightarrow y = 125 - 2x$$

$$\xrightarrow{y = 125-2x} f(x) = x \cdot (125 - 2x) = -2x^2 + 125x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x + 125 = 0 \Rightarrow x = 31,25$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow Max \Rightarrow y = 62,5$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 1.953,125$$

4.) Extremwertaufgabe II

Eine Dose (Zylinderform) hat ein Volumen von 5 Litern
Der Materialverbrauch zur Herstellung der Dose soll möglichst gering gehalten werden.
Wie müssen die Abmessungen (Radius und Höhe) gewählt werden?
Bitte benennen Sie auch die Maßeinheiten.

Lösung:

$$Zielfunktion: \quad O(r,h) = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

$$Nebenbedingung: \quad 5 = r^2\pi h \Rightarrow h = \frac{5}{r^2\pi}$$

$$\xrightarrow{h = \frac{5}{r^2\pi}} O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{5}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{10}{r}$$

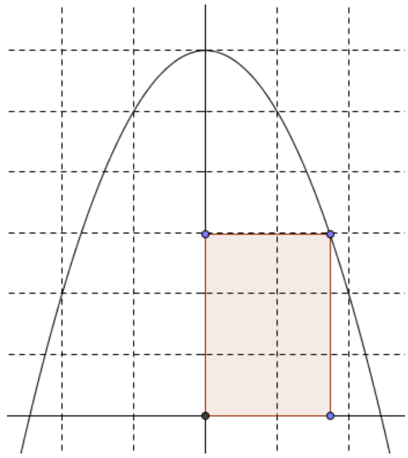
$$\Rightarrow O'(r) = 4r\pi - \frac{10}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{5}{2\pi}} \approx 0,92668$$

$$\Rightarrow O''(r) = 4\pi + \frac{20}{r^3} > 0 \Rightarrow Min \Rightarrow h = \frac{5}{0,92668^2\pi} = 1,85336$$

Die Maßeinheit muss ***dm*** lauten.

5.) Extremwertaufgabe III

Der Eckpunkt P(x/y) eines achsenparallelen Rechtecks liegt auf der Parabel $f(x) = 6 - x^2$.



a) Wie muss x gewählt werden, damit die Fläche des Rechtecks maximal wird?

b) Wie muss x gewählt werden, damit der Umfang des Rechtecks ein Maximum darstellt?

c) Sei nun die Funktion $f_k(x) = k - x^2$ gegeben.

Zeigen Sie, dass allgemein für $x = \sqrt{\frac{k}{3}}$ die Fläche maximal wird.

Lösung: zu a)

$$Zielfunktion: \quad f(x,y) = x \cdot y \qquad und \qquad Nebenbedingung: \quad y = 6 - x^2$$

$$\xrightarrow{y \ = \ 6-x^2} \quad f(x) = x \cdot (6 - x^2) = -x^3 + 6x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2} \quad \text{(nur positive Lösung relevant!)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = -6x \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = -6 \cdot \sqrt{2} < 0 \Rightarrow Max \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = 4 \cdot \sqrt{2}$$

Lösung: zu b)

$$Zielfunktion: \quad f(x,y) = 2(x+y) \qquad und \qquad Nebenbedingung: \quad y = 6 - x^2$$

$$\xrightarrow{y \ = \ 6-x^2} \quad f(x) = 2x + 2 \cdot (6 - x^2) = -2x^2 + 2x + 12$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow Max \Rightarrow y = 5{,}75$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = 2 \cdot (0{,}5 + 5{,}75) = 12{,}5$$

Lösung: zu c)

$$Zielfunktion: \quad f(x,y) = x \cdot y \quad und \quad Nebenbedingung: \quad y = k - x^2$$

$$\xrightarrow{y = k - x^2} f(x) = x \cdot (k - x^2) = -x^3 + kx$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + k = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{k}{3}} \quad \text{(nur positive Lösung relevant!)}$$

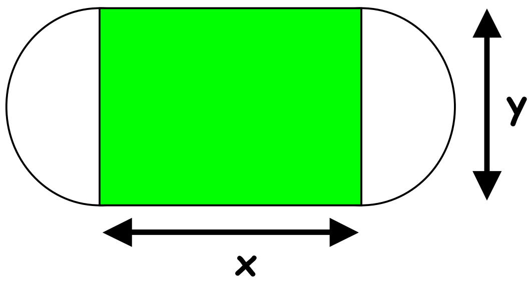
$$\Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow f''\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = -6 \cdot \sqrt{\frac{k}{3}} < 0 \Rightarrow Max \Rightarrow y = \frac{2}{3}k$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt{\frac{k}{3}} \cdot \frac{2}{3}k = \frac{2}{9}k \cdot \sqrt{3k}$$

6.) Extremwertaufgabe IV

Die Laufbahn eines Leichathletikstadions hat einen Umfang von 400 m.

Welche Maße muss der Innenraum des rechteckigen Rasens erhalten, wenn seine Fläche maximal werden soll?



Lösung:

$$Zielfunktion: \quad f(x,y) = x \cdot y$$

$$Nebenbedingung:$$

$$400 = 2x + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) \cdot \pi \Rightarrow 400 = 2x + y\pi \Rightarrow y = \frac{400}{\pi} - \frac{2x}{\pi}$$

$$\xrightarrow{y = \frac{400}{\pi} - \frac{2x}{\pi}} f(x) = x \cdot \left(\frac{400}{\pi} - \frac{2x}{\pi}\right) = \frac{400x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{400}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \Rightarrow x = 100$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{4}{\pi} < 0 \Rightarrow Max \Rightarrow y = \frac{200}{\pi}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 100 \cdot \frac{200}{\pi} = \frac{20.000}{\pi}$$