Musterlösung **11. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 20.05.2010**

Klasse: HBF OM 09 **Fach: Mathematik**

Themen: Ableitungen; Extremwerte; Wendepunkte; Kurvendiskussion

---

1.) Ableitungen I

Bilden Sie von jeder Funktion die **erste und zweite** Ableitung.

a) $f(x) = ax^{2n} + bx^{n+2} + cx^{1-n}$

Lösung:

$$f'(x) = 2nax^{2n-1} + (n+2)bx^{n+1} + (1-n)cx^{-n}$$

$$f'(x) = 2nax^{2n-1} + (n+2)bx^{n+1} + \frac{(1-n)c}{x^n}$$

$$f''(x) = 2n(2n-1)ax^{2n-2} + (n+2)(n+1)bx^n + (-n)(1-n)cx^{-n-1}$$

$$f''(x) = 2n(2n-1)ax^{2n-2} + (n+2)(n+1)bx^n - \frac{n(1-n)c}{x^{n+1}}$$

b) $f(x) = (3x-2)(6+x)$

Lösung:

$$f(x) = (3x-2)(6+x) = 3x^2 + 16x - 12$$

$$f'(x) = 6x + 16 \qquad und \qquad f''(x) = 6$$

c) $f(x) = \frac{2x^5 - 3x^4 + 8x^3}{x^4}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x^5 - 3x^4 + 8x^3}{x^4} = \frac{2x^5}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4} + \frac{8x^3}{x^4} = 2x - 3 + \frac{8}{x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} \qquad und \qquad f''(x) = \frac{16}{x^3}$$

d) $f(x) = \dfrac{8x^3-12x-16}{4x^2}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{8x^3-12x-16}{4x^2} = \frac{8x^3}{4x^2}-\frac{12x}{4x^2}-\frac{16}{4x^2} = 2x-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 2+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3} \quad und \quad f''(x) = -\frac{6}{x^3}-\frac{24}{x^4}$$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{0,5}$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-1,5} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}}$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

$$\rightarrow \quad f''(x) = \frac{5}{16}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}$$

2.) Ableitungen II

Bilden Sie von der Funktion die **erste** Ableitung.

$$f(x) = \frac{x^{n+2} - 3x^n + 2x^{n-4}}{x^n}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^{n+2} - 3x^n + 2x^{n-4}}{x^n} = \frac{x^{n+2}}{x^n} - \frac{3x^n}{x^n} + \frac{2x^{n-4}}{x^n} = x^2 - 3 + \frac{2}{x^4}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x^5}$$

3.) Extremwerte

Bestimmen Sie die Extremwerte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

Lösung:

$$f'(x) = 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$f''(x) = 2 \rightarrow f''(4) = 2 > 0 \Rightarrow TP(4 \mid -1)$$

b) $f(x) = 32x - x^4$

Lösung:

$$f'(x) = 32 - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f''(x) = -12x^2 \rightarrow f''(2) = -48 < 0 \Rightarrow HP(2 \mid 48)$$

4.) Wendepunkte

Bestimmen Sie die Wendepunkte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4 - x^3$

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2$$
$$f''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$f'''(x) = -6 \rightarrow f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow WP(0 \mid 4)$$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

Lösung:

$$f'(x) = -4x^3 + 10x$$
$$f''(x) = -12x^2 + 10 = 0 \rightarrow |x| = \sqrt{\frac{5}{6}}$$
$$f'''(x) = -24x \rightarrow f'''\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \neq 0 \Rightarrow WP_{1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}} \;\middle|\; -\frac{19}{36}\right)$$

5.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

a) Nullstellen

b) Extremwerte

c) Wendepunkte

d) Skizze der Funktion

Lösung:

Nullstellen:

$$f(x) = x^2\left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow x_1 = 0\,(doppelt) \quad und \quad x_2 = 4$$

Extremwerte:

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + x = 0 \rightarrow x\left(-\frac{3}{8}x+1\right) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x+1$$

$$\rightarrow f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow TP(0 \mid 0)$$

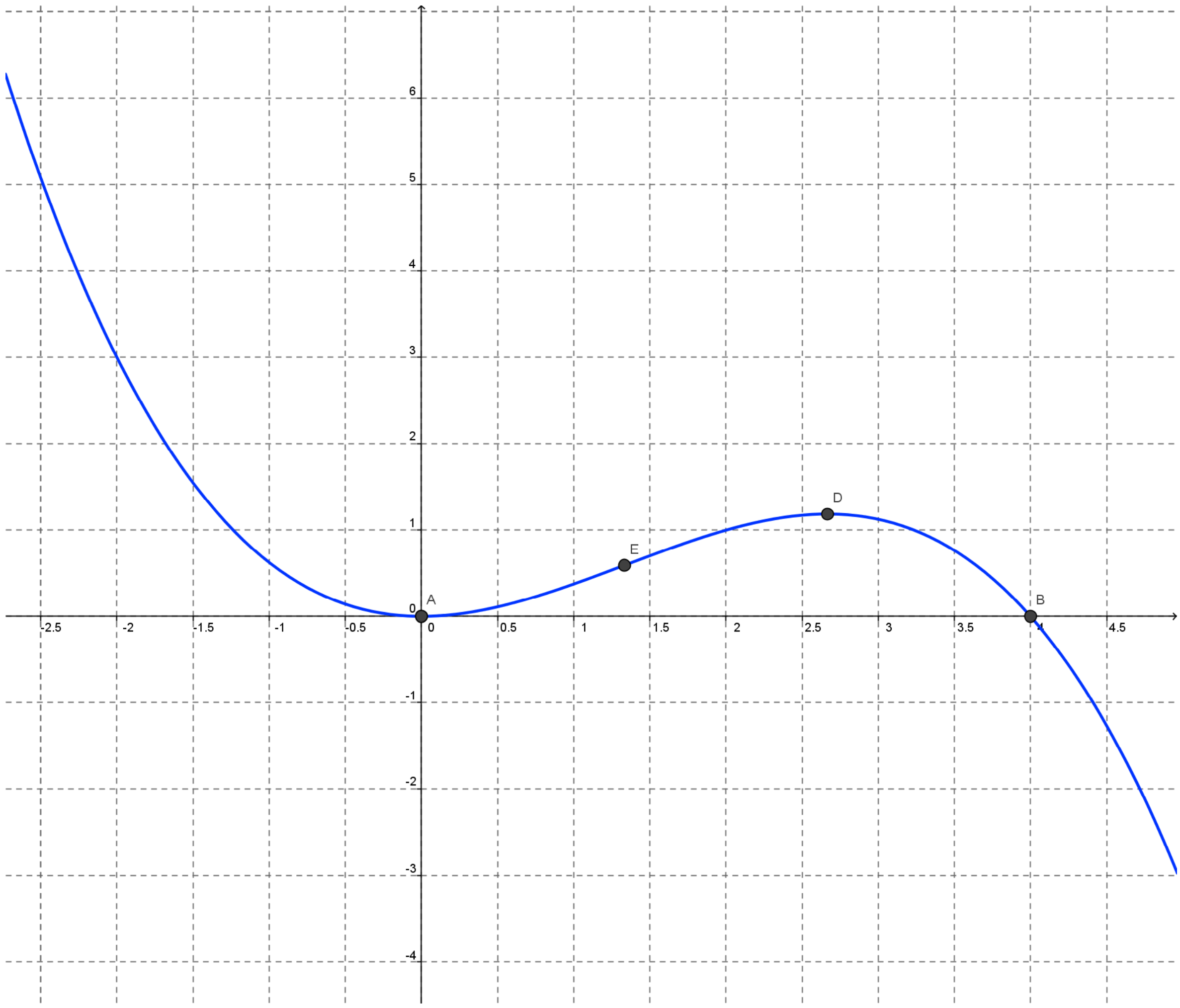
$$\rightarrow f''\left(\frac{8}{3}\right) = -1 < 0 \Rightarrow HP\left(\frac{8}{3} \,\middle|\, \frac{32}{27}\right)$$

Wendepunkte:

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x+1 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{4} \rightarrow f'''\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow WP\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, \frac{16}{27}\right)$$



6.) Wendepunkte - Theorie

a) Die Funktion $f(x) = x^4 - 1{,}5ax^2$ soll **<u>zwei</u>** Wendepunkte besitzen.

Welche Bedingung muss a erfüllen?

Lösung:

$$f'(x) = 4x^3 - 3ax$$

$$f''(x) = 12x^2 - 3a = 0 \rightarrow |x| = \frac{1}{2}\sqrt{a} \Rightarrow a > 0$$

$$f'''(x) = 24x \rightarrow f'''\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}\right) \neq 0 \Rightarrow WP_{1/2}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{a} \;\middle|\; -\frac{5}{16}a^2\right)$$

b) Warum kann die Funktion $f(x) = x^2 - 8x$ keine Wendepunkte besitzen?

Lösung: Die Funktion kann keine Wendepunkte besitzen, weil die notwendige Bedingung $f''(x) = 2 \stackrel{!}{=} 0$ nicht erfüllt ist.

7.) Vervollständigen Sie folgenden Lückentext

In der Mathematik ist ein **Extremwert** (oder *Extremum*; Plural: ***Extrema***) der Überbegriff für lokales und globales Maximum und Minimum. Ein ***lokales Maximum*** ist der Wert der Funktion an einer Stelle x, in deren Umgebung die Funktion keine größeren Werte annimmt.

Ein globales Maximum wird auch ***absolutes Maximum*** genannt, für ein lokales Maximum wird auch der Begriff ***relatives Maximum*** gebraucht. Lokale und globale Minima sind analog definiert.

Was ist nun eigentlich ein Extrempunkt?

Ein Extrempunkt ist ein Punkt auf dem Funktionsgraphen, der in einer Umgebung (in einem Intervall), entweder der höchste Punkt (dann nennt man ihn **Maximum** oder **Hochpunkt**) oder aber der tiefste Punkt (dann nennt man ihn **Minimum** oder **Tiefpunkt**) ist.

Wenn das Maximum (oder der Hochpunkt) nur in seiner Umgebung der höchste Punkt ist, dann nennen wir diesen Punkt **lokales oder relatives Maximum**. Ist er der höchste Punkt der gesamten Funktion, so nennen wir ihn **globales oder absolutes Maximum**.

Das Gleiche gilt für Minima. Ist ein Minimum nur der **tiefste Punkt in seiner Umgebung**, so nennen wir es lokales oder relatives Minimum. Ist er aber auf der gesamten Funktion der tiefste Punkt, so nennen wir es **globales oder absolutes** Minimum.

Extrempunkte berechnen (Theorie)

Zuerst müssen wir uns überlegen, wann die Eigenschaften von einem Extrempunkt gegeben sind. Wann sind die höchsten Punkte und wann die tiefsten. Dafür steigen wir in Gedanken auf unser Fahrrad (wem das zu anstrengend ist: Motorrad) und fahren auf unserem Funktionsgraphen los. Wir nehmen an, dass es anfangs nur bergauf geht. Wir suchen den höchsten Punkt, das heißt also, sobald es nicht mehr bergauf geht,

haben wir unseren **höchsten Punkt** – unser Maximum – erreicht und fahren ab da bergab.
Wir übertragen unser Modell auf die **Mathematik** .
Zuerst das **Maximum** : Die Funktion steigt monoton an (die **Ableitung ist solange positiv**), nach dem Erreichen des Hochpunkts **fällt die Funktion monoton** (ab dort ist die Ableitung negativ).
Wir suchen also die Stelle, an der die Ableitung von **positiv zu negativ** wechselt, also die **Nullstelle der Ableitung** . Das ist die **notwendige Bedingung**, an dieser Stelle können wir aber noch nicht entscheiden, ob es sich wirklich um ein Maximum handelt.
Das Gleiche gilt auch für das Minimum: Die Funktion fällt monoton (solange ist die Ableitung negativ), ab dem Minimum steigt die Funktion wieder monoton (die Ableitung wechselt ins Positive). An der Stelle, an dem die Ableitung Null ist, befindet sich also unser Extrempunkt. Ob es ein Hochpunkt oder Tiefpunkt ist, können wir erst entscheiden, wenn ...
wir die zweite Ableitung berechnen d.h. die Lösungen aus der notwendigen Bedingung (1. Ableitung) in die zweite Ableitung einsetzen.
Ist der Wert der zweiten Ableitung größer 0, dann handelt es sich um einen Tiefpunkt (Linkskrümmung an dieser Stelle); ist der Wert der zweiten Ableitung kleiner als 0, dann hat man einen Hochpunkt vorliegen (Rechtskrümmung an dieser Stelle)

<u>Begriffe zum Einsetzen:</u>

höchsten Punkt   Nullstelle der Ableitung   lokales oder relatives Maximum
tiefste Punkt in seiner Umgebung   notwendige Bedingung
absolutes Maximum   Ableitung ist solange positiv   positiv zu negativ
relatives Maximum   Maximum   Hochpunkt   Minimum   Tiefpunkt
Extremwert   globales oder absolutes Maximum   Maximum   Extrema
globales oder absolutes   Mathematik   fällt die Funktion monoton
lokales Maximum