

Finanzmathematik I: Zinseszinsrechnung

- 1.) Auf welchen Betrag wächst ein Anfangskapital K_0 zu p % Zinseszinsen nach n Jahren?

K_0	p	n	K_0	p	n
5.400,--	4,5	7	7.600,--	4	10
8.200,--	6	9	9.300,--	5	12

Lösung: $K_7 = 7.348,65$ $K_9 = 13.853,73$ $K_{10} = 11.249,86$ $K_{12} = 16.701,46$

- 2.) Ein Kapital von 6.250 € war 10 Jahre hindurch ausgeliehen.
Auf wie viel € ist es angewachsen, wenn 5 % Zinseszinsen p.a. gerechnet wurden und eine halbjährliche Zinskapitalisierung erfolgte?

Lösung: Endkapital = 10.241,35

- 3.) Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 2.000 € zu 6 % p.a. in 10 Jahren bei vierteljährlichen Zinsperioden an?

Lösung: Endkapital = 3.628,04

- 4.) Ein Kapital von 6.200 € wird 5 Jahre lang mit 5 %, danach 4 Jahre mit 4,5 % und anschließend noch 3 weitere Jahre mit 4 % verzinst.
Auf welchen Betrag ist es angewachsen?

Lösung: Endkapital = 10.614,59

Wie hoch ist die durchschnittliche Verzinsung?

Lösung: $i_{\text{eff}} = \sqrt[12]{1,05^5 \cdot 1,045^4 \cdot 1,04^3} - 1 = \sqrt[12]{1,71203} - 1 = 0,0458$

- 5.) Vervollständigen Sie die Tabelle:

K_0	p	n	K_n	K_0	p	n	K_n
9.483,77	4	6	12.000,00	3.100,00	4	20	6.792,48
2.000,00	6	12	4.024,40	7.762,52	6	4	9.800,00
2.000,00	4	10	2.960,50	4.200,00	5	6	5628,40
5.827,59	5	7	8.200,00	6.200,00	4,5	6	8.074,00
3.100,00	6	12	6.237,80	1.200,00	6	8	1.912,62
1.200,00	5	17	2.750,42	5.315,94	4,5	9	7.900,00

- 6.) Ein Schuldner hat sich zu folgenden Zahlungen verpflichtet:
6.000 € nach 4 Jahren, 8 T€ nach 6 Jahren und 4.000 € nach 9 Jahren.
Er will sich dieser Verpflichtung durch eine sofortige Zahlung entledigen.
Wie hoch wäre die Barzahlung, wenn 4 % Zinsen zugrunde gelegt würden?

Lösung: Barzahlung = 14.261,70

- 7.) In welcher Zeit verdoppeln sich 2.100 € bei 6 % Zinseszinsen?

Lösung: ca. 12 Jahre

- 8.) Zu wie viel % ist ein Kapital ausgeliehen, wenn es in 18 Jahren auf dieselbe Summe anwächst, wie ein doppelt so großes Kapital zu 6 % in 4 Jahren?

Lösung: $p = 5,28$

- 9.) Welches Kapital wächst in 12 Jahren bei 5 % Zinsen auf den gleichen Betrag an wie ein anderes um 3.000 € größeres Kapital zu 4 % Zinsen in 7 Jahren?

Lösung: Anfangskapital = 8.225,87

Finanzmathematik II: Rentenrechnung

- 1.) Harry Knausrig legt zu Anfang eines jeden Jahres 1.300 EUR bei der Sparkasse zu 4 % an. Zu welcher Höhe sind die Einzahlungen nach 15 Jahren angewachsen?

Lösung: Endkapital = 27.071,89

- 2.) Kurt Bökel zahlt von der Geburt seines Sohnes Casimir für diesen am Ende eines jeden Jahres 500,00 € bei der Bank Pleitegeier & Co ein.
Welcher Betrag wird dem Sohn nach 21 Jahren ausgezahlt, wenn 4 % Zinseszinsen vergütet werden?

Lösung: Endkapital = 15.984,60

- 3.) Welche einmalige Summe ist bei der Rentenanstalt einzuzahlen, um 11 Jahre lang am Schluss eines jeden Jahres eine Rente von 550,00 € beziehen zu können?
Zinssatz: 5,5 %.

Lösung: Einzahlung = 4.450,89

- 4.) Herr Bommel zahlt bei der Zinsbank 5 Jahre lang zu Beginn eines jeden Jahres 650,00 € ein. Nach diesem Zeitraum erfolgen keine Einzahlungen mehr. Auf welchen Betrag ist die Rente am Ende des 9. Jahres bei 4,5 % Zinseszinsen angewachsen?

Lösung: Endkapital = 4.431,38

- 5.) Wie oft müssen zu Beginn eines jeden Jahres 600 EUR bei einer Bank eingezahlt werden, damit man 4,5 % Zinseszinsen am Ende des letzten Einzahlungsjahres über ein Kapital von 3.430,00 € verfügen kann?

Lösung: 5 Einzahlungen

- 6.) Ferdi Elch hat 20 Jahre lang am Jahresende einen gleich großen Betrag auf seinen Sparvertrag eingezahlt. Bei 5 % Zinseszinsen beläuft sich sein Guthaben jetzt auf 35.272,55 €. Wie hoch waren die jährlichen Sparleistungen?

Lösung: Jährliche Einzahlung = 1.066,73

- 7.) Ein Kaufmann erwarb ein zweites Fabrikgebäude mit der Auflage, der bisherigen Inhaberin Witwe Bolte 20 Jahre lang am Ende des Jahres 10.000 EUR zu überweisen. Durch welche Abfindungssumme hätte er sich der Zahlungsverpflichtung entledigen können, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

Lösung: Abfindungssumme = 124.622,10

- 8.) Horst E. aus D. hat 20 Jahre lang ein Anrecht auf eine nachschüssig zahlbare Rente von 1.800,00 €. Er möchte stattdessen eine 25-jährige nachschüssige Rente beziehen. Wie hoch ist die neue Rente, wenn eine Verzinsung von 4,5 % vorliegt?

Lösung: Rente = 1.579,04

- 9.) Vervollständigen Sie die Tabelle

K_0	p	ewige Rente	K_0	p	ewige Rente
250.000,00	4	10.000,00	210.000,00	5	10.500,00
150.000,00	3	4.500,00	400.000,00	6	24.000,00

Finanzmathematik III:

Abdiskontierung, Barwert- bzw. Kapitalwertmethode und Interner Zinsfuß

Übungen zur Bar- und Endwertermittlung

- 1.) Ein Schuldner hat sich zu folgenden Zahlungen verpflichtet:
 2.000 € nach zwei Jahren, 5.000 € nach fünf Jahren und 4.000 € nach sieben Jahren.
 Er will sich dieser Verpflichtung durch eine einzige Zahlung zum jetzigen Zeitpunkt t_0 entledigen.
 Wie hoch muss diese Zahlung sein, wenn man mit $i = 0,08$ rechnet?

Lösung:
$$K_0 = \frac{2.000,00}{1,08^2} + \frac{5.000,00}{1,08^5} + \frac{4.000,00}{1,08^7} = 7.451,56$$

i	2.000,00	5.000,00	4.000,00		
0,08	1.714,68	3.402,92	2.333,96		7.451,56

- 2.) Für ein Wohnhaus bieten Alfred Kurz 120.000,00 bar, Bert Bund 150.000,00 zahlbar nach 5 Jahren und Chris Carlo 180.000,00 zahlbar nach 6 Jahren.
 Welches Angebot ist das günstigste bei
 a) $i = 0,06$ b) $i = 0,10$?

Lösung:

i	120.000,00	150.000,00	180.000,00
0,08	120.000,00	102.087,48	113.430,53
0,1	120.000,00	93.138,20	101.605,31

- 3.) Eine Investition besteht aus einer einmaligen Auszahlung von 10.000,00 €. Nach $n = 5$ Jahren erfolgt eine Einzahlung von 14.800,00 €. Ist diese Investition lohnend bei einem Zinssatz von
 a) $i = 0,08$ b) $i = 0,10$?

Lösung: für $i = 0,08 \Rightarrow K_0 = -10.000,00 + \frac{14.800,00}{1,08^5} = -72,63$

i	10.000,00	14.800,00			
0,08	10.000,00	10.072,63		-72,63	nicht lohnend
0,1	10.000,00	9.189,64		810,36	lohnend

Übungen zur Kapitalwertmethode

1.) Ein Autofahrer, der einen Unfall verursacht hat, steht vor folgendem Entscheidungsproblem:

- I. Er kann den Unfallschaden ohne Inanspruchnahme seiner Haftpflichtversicherung selbst regulieren. Die dabei entstehende und sofort fällige Auszahlung beläuft sich auf 1.500,00 €.
- II. Er kann die Schadenregulierung seiner Haftpflichtversicherung übergeben, hat dann jedoch durch den Verlust der Schadensfreiheitsrabatte in den nächsten Jahren mit folgenden zusätzlichen Prämienzahlungen zu rechnen:

1. Jahr: 500,00 € 2. und 3. Jahr: je 400,00 € 4. und 5. Jahr: je 300,00 €.

Welche Entscheidung würden Sie empfehlen, wenn mit einem Zinssatz von

- a) $i = 0,08$ oder
b) $i = 0,10$ zu rechnen ist?

Lösung:

i	Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Kap.-Wert
	-1.500,00	500,00	400,00	400,00	300,00	300,00	
0,08	-1.500,00	462,96	342,94	317,53	220,51	204,17	48,12
0,1	-1.500,00	454,55	330,58	300,53	204,90	186,28	-23,17

Bei welchem Zinssatz wäre die Entscheidung invariant?

0,09332	-1.500,00	457,32	334,63	306,06	209,95	192,03	0,00
---------	-----------	--------	--------	--------	--------	--------	------

Wie hoch müsste die barwertige Abgeltungssumme sein bei Entscheidungsinvarianz?

0,1	-1.476,83	454,55	330,58	300,53	204,90	186,28	0,00
-----	-----------	--------	--------	--------	--------	--------	------

Empfehlung: Bei $i = 0,08$ sollte die sofort fällige Auszahlungsvariante gewählt werden, bei $i = 0,1$ sollte er den Verlust der Schadensfreiheitsrabatte in Kauf nehmen.

2.) Die Chemie AG plant für die Modernisierung ihrer Styrodur-Produktion eine Investition.

Zwei Alternativen stehen zur Auswahl:

Maschine I kostet 90.000,00 € und ist sechs Jahre nutzbar.
Der Liquidationserlös wird mit 15.000,00 € angesetzt.

Folgende Zahlungsströme werden angenommen:

Zeit: t in Jahren	0	1	2	3	4	5	6
Einnahmen		52.000	56.000	65.000	62.000	55.000	48.000
Ausgaben		38.000	35.000	39.000	38.000	40.000	37.000
Saldo							

Maschine II kostet ebenfalls 90.000,00 € und ist sechs Jahre nutzbar.
Mit einem Liquidationserlös wird in Höhe von 5.000,00 € gerechnet.

Folgende Zahlungsströme werden erwartet:

Zeit: t in Jahren	0	1	2	3	4	5	6
Einnahmen		60.000	68.000	67.000	55.000	48.000	40.000
Ausgaben		41.000	42.000	40.000	35.000	36.000	32.000
Saldo							

Für welche Maschine wird sich das Unternehmen entscheiden? Berücksichtigen Sie dabei, dass die Investition durch eine Kreditfinanzierung zu einem Zinssatz von 8 % durchgeführt werden würde.

Lösung:

Die Investition der Maschine I wäre bei $i = 0,08$ rentabler als die Maschine II.

Bei $i = 0,1$ wäre keine der beiden Investitionen rentabel.

Investition Maschine I:								
i	Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Kapitalwert
Einnahmen	0,00	52.000,00	56.000,00	65.000,00	62.000,00	55.000,00	48.000,00	
Ausgaben	90.000,00	38.000,00	35.000,00	39.000,00	38.000,00	40.000,00	37.000,00	
EZÜ	-90.000,00	14.000,00	21.000,00	26.000,00	24.000,00	15.000,00	26.000,00	
0,08	-90.000,00	12.962,96	18.004,12	20.639,64	17.640,72	10.208,75	16.384,41	5.840,59
0,1	-90.000,00	12.727,27	17.355,37	19.534,18	16.392,32	9.313,82	14.676,32	-0,71
Investition Maschine II:								
i	Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Kapitalwert
Einnahmen	0,00	60.000,00	68.000,00	67.000,00	55.000,00	48.000,00	45.000,00	
Ausgaben	90.000,00	41.000,00	42.000,00	40.000,00	35.000,00	36.000,00	32.000,00	
EZÜ	-90.000,00	19.000,00	26.000,00	27.000,00	20.000,00	12.000,00	13.000,00	
0,08	-90.000,00	17.592,59	22.290,81	21.433,47	14.700,60	8.167,00	8.192,21	2.376,67
0,1	-90.000,00	17.272,73	21.487,60	20.285,50	13.660,27	7.451,06	7.338,16	-2.504,68