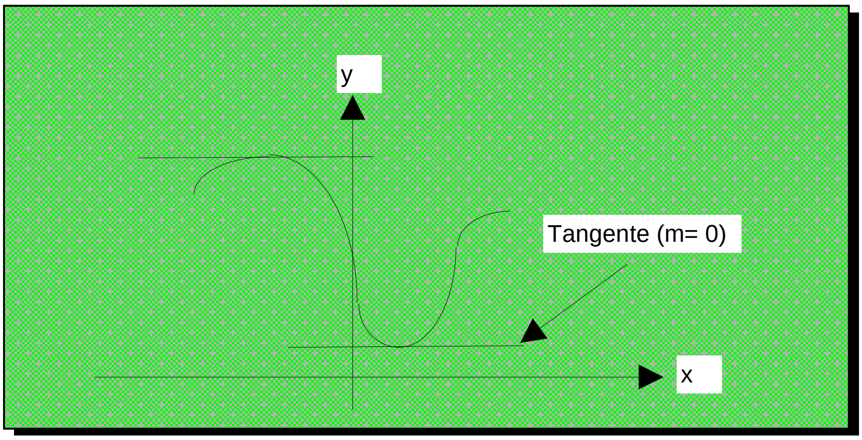
Untersuchung von Funktionen: Kurvendiskussion

Extrema: 2 Bedingungen

1. notwendig	**2. hinreichend**
$f'(x) = m = 0$	**$f''(x_0) > 0 \rightarrow$ Minimum** **$f''(x_0) < 0 \rightarrow$ Maximum**



Sonderfall: Was geschieht, wenn $f''(x) = 0$ ist?

Beispiel:

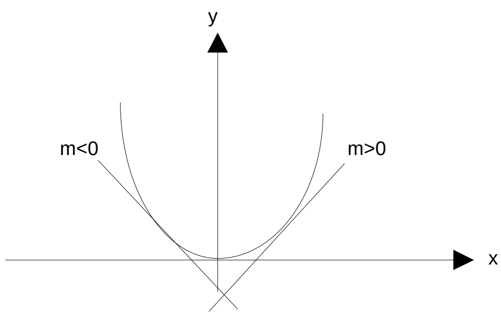
$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 12 \bullet 0^2 = 0$



Obwohl $f''(x) = 0$ gilt, zeigt der Graph der Funktion $f(x) = x^4$ deutlich, dass er an der Stelle (0|0) ein Minimum besitzt.

Ersatzkriterium:

Wenn 1. und 2. Ableitung jeweils 0 sind, dann sollte man das Steigungsverhalten links und rechts von dem ermittelten x_0-Wert untersuchen. Hierzu setzt man einen frei wählbaren Wert links von x_0 in f'(x) ein - im Beispiel wäre dies (-1):

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4.$$

Genauso verfährt man mit einem beliebigen x-Wert rechts von x_0 - z. B. (1):

$$f'(1) = 4 \cdot (1)^3 = 4.$$

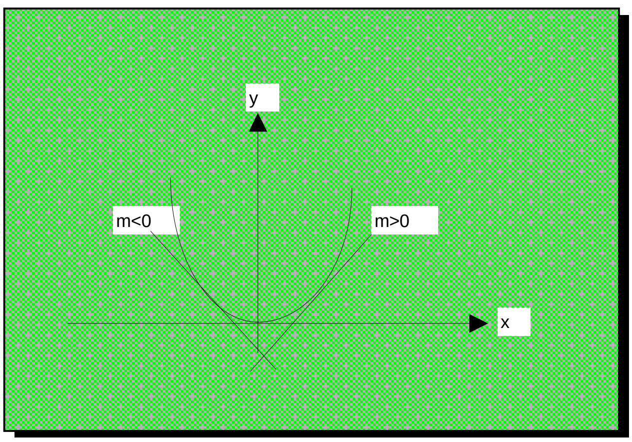
Im ersten Fall liegt eine Steigung von -4 vor; im zweiten Fall eine von 4. Da wir von einer stetigen Funktion ausgingen - d. h. es liegen keine Sprünge oder Unstetigkeitsstellen vor - folgt:

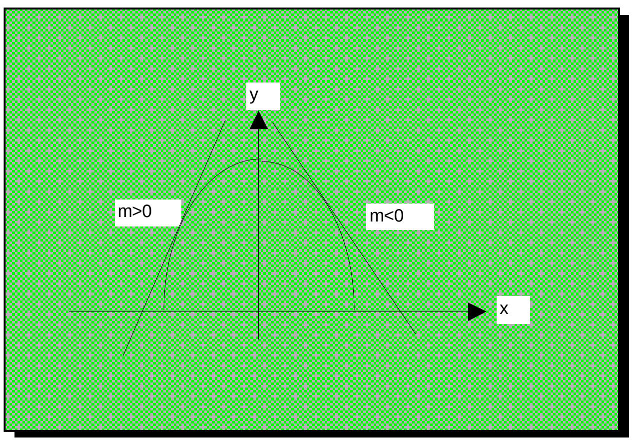
aus dem Übergang von negativen in ein positives Steigungsverhalten

in x_0 muß die Steigung 0 betragen haben ⇨ Extremwert in x_0

Die Art des Extremwerts wird durch den Übergang des Steigungsverhaltens bestimmt:

1. **von $m < 0 \rightarrow m > 0$ ⇨ Minimum**
2. **von $m > 0 \rightarrow m < 0$ ⇨ Maximum**



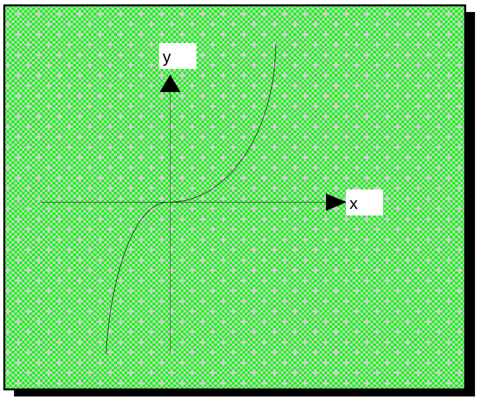


Wendepunkte: 2 Bedingungen

$f''(x) = 0$ notwendig

$f'''(x) \neq 0$ hinreichend

Beispiel:



1. $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x = 0$

$x = 0$

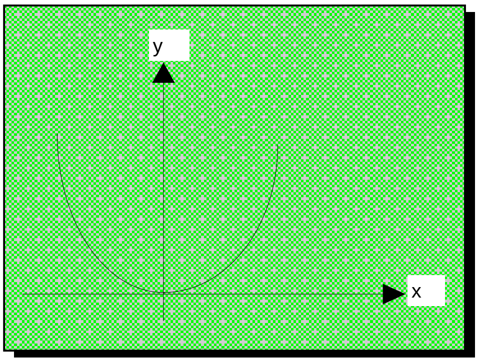
$f'''(x) = 6$

$f'''(0) = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = 0$

Gibt es hierbei auch Sonderfälle - oder ist das immer so???

Situation ❶



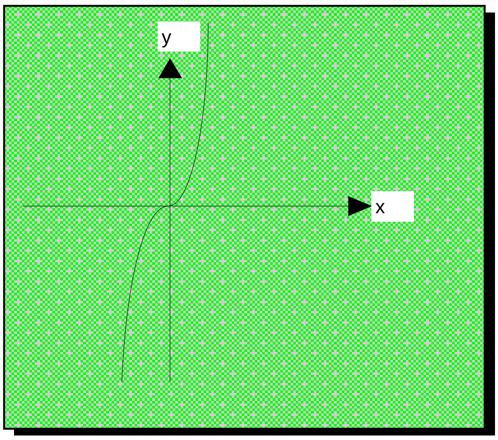
$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$f'''(0) = 0$ $\Rightarrow$ **kein Wendepunkt**

Situation ❷



$f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20x^3 = 0$

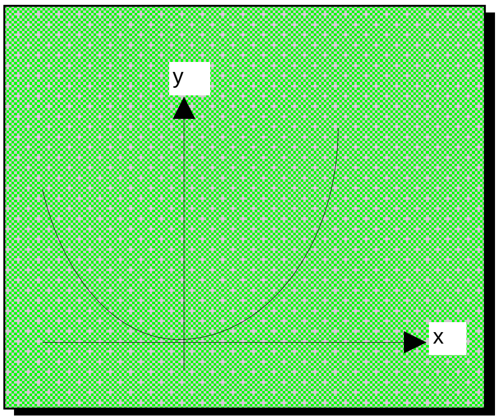
$x = 0$

$f'''(x) = 60x^2$

$f'''(0) = 0$ $\Rightarrow$ ***kein Wendepunkt ??***

Situation ❸

$f(x)$	=	x^4		
$f'(x)$	=	$4x^3$		
$f''(x)$	=	$12x^2$	=	0
		x	=	0
$f'''(x)$	=	$24x$		
$f'''(0)$	=	0	$\Rightarrow$ **kein Wendepunkt**	



Die Situationen 1 und 3 erfüllen das hinreichende Kriterium nicht und somit liegt kein Wendepunkt vor, wie dies auch aus den Zeichnungen zu entnehmen ist.

Der Fall 2 steht allerdings in vermeintlichem Widerspruch zu dieser Betrachtung: Obwohl das hinreichende Kriterium nicht erfüllt ist, existiert in $x_0 = 0$ ein Wendepunkt.

Ersatzkriterien für Sonderfälle:

❶ **Am Wendepunkt ändert f '' das Vorzeichen beim Einsetzen von links- und rechtsseitigen Werten von x_0.**

	$f''(x)$	=	$20x^3$
linksseitig:	$f''(-1)$	=	-20
rechtsseitig:	$f''(1)$	=	20

⇨ $f(x) = x^5$ hat in (0|0) doch einen Wendepunkt, obwohl $f'''(0) = 0$ gilt.

❷ **Untersuchung des Steigungsverhaltens:**

Am Wendepunkt ändert f ' das Vorzeichen beim Einsetzen von links- und rechtsseitigen Werten von x_0 nicht.

	$f'(x)$	=	$5x^4$				
linksseitig:	$f'(-1)$	=	5	d.h.	m	>	0
rechtsseitig:	$f'(1)$	=	5	d.h.	m	>	0

⇨ $f(x) = x^5$ hat in (0|0) doch einen Wendepunkt, obwohl $f'''(0) = 0$ gilt.