Determinantensätze

Satz 1: Eine Determinante kann man stürzen, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen bzw. an der Hauptdiagonalen spiegeln, ohne dass sich ihr Wert ändert.

$$\boxed{\mathbf{Det\ (A) \quad = \quad Det\ (A^T)}}$$

Satz 2: Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten einer Determinante, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.

$$\boxed{\mathbf{Det\ (\ldots,\ a_i\ ,\ldots,\ a_k\ ,\ldots) \quad = \quad -\ Det\ (\ldots,\ a_k\ ,\ldots,\ a_i\ ,\ldots)}}$$

Satz 3: Wenn eine Spalte oder Zeile einer Determinante aus lauter Nullen besteht, hat die Determinate den Wert Null.

$$\boxed{\mathbf{Det\ (\ldots,\ a_i\ ,\ldots,\ 0\ ,\ldots) \quad = \quad 0}}$$

Satz 4: Wenn zwei Spalten oder Zeilen einer Determinante einander proportional sind ($k \in \Re$), hat die Determinante den Wert Null.

$$\boxed{\mathbf{Det\ (\ldots,\ a_i\ ,\ldots,\ ka_i\ ,\ldots) \quad = \quad 0}}$$

Anmerkung: Eine Determinante nimmt dann den Wert 0 an, wenn die Zeilen oder Spalten linear abhängig sind.

Satz 5: Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl $k \in \Re$, indem man die Elemente einer Spalte oder Zeile mit der Zahl multipliziert. Dadurch multipliziert sich der Wert der Determinante mit k.

$$\boxed{\mathbf{Det\ (a_1\ ,\ldots,\ ka_i\ ,\ldots,\ a_n) \quad = k\ Det\ (a_1\ ,\ldots,\ a_i\ ,\ldots,\ a_n)}}$$

Satz 6: Man addiert zwei Determinanten, die sich nur in den Elementen einer Zeile oder Spalte unterscheiden, indem man die Elemente dieser Zeilen oder Spalten addiert und die übrigen beibehält.

Anmerkung: Natürlich gilt dieser Vorgang auch umgekehrt:

$$\boxed{\mathbf{Det\ (\ldots,\ a_i + b_i\ ,\ldots) \quad = Det\ (\ldots,\ a_i\ ,\ldots) + Det\ (\ldots,\ b_i\ ,\ldots)}}$$

Aber: Det (A + B) $\neq$ Det (A) + Det (B)

Satz 7: Addiert man zu den Elementen einer Zeile oder Spalte ein beliebiges Vielfaches der Elemente einer **anderen** (Wichtig: $i \neq j$) Zeile oder Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(\ldots,\ a_i + k a_j\ ,\ldots) \quad = \mathrm{Det}\,(\ldots,\ a_i\ ,\ldots)}$$

Satz 8: Der Wert einer Determinante, bei der oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, ist gleich dem Produkt der Elemente in der Hauptdigonalen.

Daraus resultiert folgender Sonderfall:

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(E) \quad = 1}$$

Satz 9:

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(k a_1\ ,\ldots,\ k a_i\ ,\ldots,\ k a_n) \quad = k^n\ \mathrm{Det}\,(a_1\ ,\ldots,\ a_i\ ,\ldots,\ a_n)}$$

Satz 10:

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(A * B) \quad = \mathrm{Det}\,(A) * \mathrm{Det}\,(B)}$$

Satz 11:

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(A^{-1}) \quad = {}^{1}/_{\mathrm{Det}\,(A)}}$$