Lösungen:

(Lineare) Optimierung I: Simplexalgorithmus / Solver

Übungen mit zwei Variablen

Aufgabe 1:

Eine Unternehmung stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her. Die Fertigung erfolgt auf den Maschinen M_1, M_2 und M_3 und erfordert unterschiedliche Belegungszeiten. Die Bearbeitungsdauer (bezogen auf Minuten) und die Kapazitäten (in Minuten) der Maschinen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	Bearbeitungszeit für P_1	Bearbeitungszeit für P_2	Kapazität
M_1	20	40	8.000
M_2	15	10	3.000
M_3	30	10	5.400

a) Der Deckungsbeitrag pro ME beträgt 90 GE von P_1 und 120 GE von P_2.

Wie viele ME sind von P_1 und P_2 herzustellen, damit der gesamte Deckungsbeitrag möglichst groß ist?
Wie hoch ist der maximale Deckungsbeitrag?

Lösung:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 900 \end{pmatrix} \quad mit \quad DB_{\max} = 27.000$$

b) Durch gesunkene Rohstoffpreise für P_1 hat sich dessen Deckungsbeitrag pro ME verdoppelt, der Deckungsbeitrag für P_2 ist gleichzeitig auf 90 GE gesunken.
Wie hoch ist jetzt der maximale Deckungsbeitrag und bei welcher Mengenkombination wird er erreicht?

Lösung:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 60 \\ 2.400 \end{pmatrix} \quad mit \quad DB_{\max} = 34.200$$

Aufgabe 2:

Eine Großhandlung für Süßwaren mischt zwei Pralinensorten S_1 und S_2 zu einer dritten Sorte zusammen. Die Mischungen S_1 und S_2 enthalten in unterschiedlicher Zusammenstellung Nuss-, Marzipan- und Alkoholpralinen. Die neue Mischung soll mind. 146 kg Nusspralinen, mind. 550 kg Marzipanpralinen und mind. 400 kg Alkoholpralinen enthalten.

Die nebenstehende Tabelle gibt an, wie viel kg Nuss-, Marzipan- und Alkoholpralinen in den Sorten S_1 und S_2 vorhanden sind und wie teuer eine Packungseinheit dieser Sorte jeweils ist.

	S_1	S_2
Nusspralinen	2	1
Marzipanpralinen	4	5
Alkoholpralinen	2	5
Sortenpreis	500 €	400 €

Wie viel kg von jeder der Sorten S_1 und S_2 müssen für die neue Mischung genommen werden, damit die Kosten möglichst gering sind?

Lösung: $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 86 \end{pmatrix} \quad mit \quad K_{\min} = 46.400$$

Aufgabe 3: Ermitteln Sie jeweils graphisch das Maximum

(1) $x \geq 0\,; \quad y \geq 0$

(2) $3x + 4y \leq 30$

(3) $15x + 10y \leq 90$

(4) $Z(x,y) = 10x + 10y \to \max$

Lösung: $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\max} = 80$$

$(1)\quad x \geq 0\,; \quad y \geq 0$

$(2)\quad 2x + 3y \quad \leq \quad 30$

$(3)\quad 2x + 2y \quad \leq \quad 24$

$(4)\quad x \leq 10$

$(5)\quad Z(x, y) \quad = \quad 15x + 10y \rightarrow \max$

Lösung: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\max} = 170$$

$(1)\quad x \geq 0\,; \quad y \geq 0$

$(2)\quad 2x + 6y \quad \leq \quad 300$

$(3)\quad 4x + 8y \quad \leq \quad 480$

$(4)\quad 7{,}5x + 5y \quad \leq \quad 750$

$(5)\quad Z(x, y) \quad = \quad 30x + 40y \rightarrow \max$

Lösung: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\max} = 3.300$$

$(1)\quad x \geq 0\,; \quad y \geq 0$

$(2)\quad 10 \quad \leq \quad x \quad \leq \quad 50$

$(3)\quad 7x + 10y \quad \leq \quad 700$

$(4)\quad 11x + 6y \quad \leq \quad 660$

$(5)\quad Z(x, y) \quad = \quad 50x + 50y \rightarrow \max$

Lösung: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 600 \\ 770 \\ 250 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\max} = \frac{68.500}{17} \approx 4.029{,}41$$

Aufgabe 4: Ermitteln Sie jeweils graphisch das Minimum

(1) $x \geq 0\,; \quad y \geq 0$
(2) $4x + 2y \quad \geq \quad 10$
(3) $2x + 2y \quad \geq \quad 8$
(4) $Z(x, y) \quad = \quad 10x + 30y \rightarrow \min$

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\min} = 40$

(1) $x \geq 0\,; \quad y \geq 0$
(2) $x \geq 4\,; \quad y \geq 6$
(3) $2x + 4y \quad \geq \quad 40$
(4) $Z(x, y) \quad = \quad 30x + 20y \rightarrow \min$

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\min} = 280$

(1) $x \geq 0\,; \quad y \geq 0$
(2) $5x + 10y \quad \geq \quad 50$
(3) $x + 5y \quad \geq \quad 15$
(4) $4x + 2y \quad \geq \quad 20$
(5) $Z(x, y) \quad = \quad 36x + 9y \rightarrow \min$

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\min} = 90$

(1) $x \geq 0\,; \quad y \geq 0$
(2) $20 \quad \leq \quad x \quad \leq \quad 140$
(3) $20 \quad \leq \quad y \quad \leq \quad 90$
(4) $2x + y \quad \geq \quad 140$
(5) $x + 2y \quad \geq \quad 160$
(6) $Z(x, y) \quad = \quad 50x + 200y \rightarrow \min$

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 20 \end{pmatrix} \quad mit \quad Z_{\min} = 10.000$