Binomischer Lehrsatz und der Beweis

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\right)$$

1. Möglichkeit:

Induktionsanfang: Für n = 0 gilt

Linke Seite: $(a+b)^0 = 1$ Rechte Seite: $\binom{0}{0} a^{0-0}b^0 = 1$

Induktionsschritt: *Aus A(n)* $\rightarrow$ *A(n+1)*

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)^n\,(a+b)$$

$$= a\,(a+b)^n + b\,(a+b)^n$$

$$= a\left[\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n\right]$$

$$+ \quad b\left[\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n\right]$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \binom{n}{2} a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^1 b^n$$

$$+ \quad \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

1 1 1

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$$

2 2

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right)$$

Hey - don't forget ...

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

1

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad und \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

2