Übungen zur Vollständigen Induktion

Diese wahren Sätze können alle mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden.

Satz 1: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Satz 2: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

Satz 3: $a + 2a + 3a + \ldots + na = a * \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $a \in \Re$

Satz 4: $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

Satz 5: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Satz 6: $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$

Satz 7: $1 + 5 + 25 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

Satz 8: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ für alle $q \in \Re \setminus \{1\}$

Satz 9: $1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Satz 10: $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Satz 11: $1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Satz 12: $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

Satz 13: $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

Satz 14: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

Satz 15: $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Satz 16: $\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Satz 17: $\frac{1}{1*4} + \frac{1}{4*7} + \frac{1}{7*10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

Satz 18: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Satz 19: $9^n - 1$ ist durch 8 teilbar.

Satz 20: $3^{2n} - 1$ ist durch 8 teilbar.

Satz 21: $9^{n+1} - 1$ ist durch 4 teilbar.

Satz 22: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

Satz 23: $3n^2 + 15n + 6$ ist durch 6 teilbar.

Satz 24: $n(n + 1)(n + 5)$ ist durch 6 teilbar.

Satz 25: $n^3 + 5n$ ist durch 3 teilbar.

Satz 26: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Kuben ist durch 3 teilbar.
Oder: $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ ist durch 3 teilbar.

Satz 27: $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ ist eine natürliche Zahl.

Satz 28: $2^n \geq n + 1$

Satz 29: $(1 + a)^n \geq 1 + na$ für alle $a > -1$

Satz 30: $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 * a_2 * a_3 * ... * a_n}$

Satz 31: Für die Funktion f: $\boldsymbol{N} \rightarrow \Re$ gelten $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = 2a_n$.
Wie lautet das Bildungsgesetz? Beweisen Sie durch vollst. Induktion.

Satz 32: Für die Funktion f: $\boldsymbol{N} \rightarrow \Re$ gelten die beiden folgenden Bedingungen:

(1) $f(1) = 1$ (2) $f(1) + 2 * f(2) + 3 * f(3) + ... + n * f(n) = n * (n + 1) * f(n)$ für $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$

a) Berechnen Sie f(2000).

b) Ermitteln Sie einen expliziten Funktionsterm bzw. das entsprechende Bildungsgesetz.

c) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Satz 33: $\sum_{x=1}^{n} \left[3x(x+2)\right] = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+7)$

Satz 34: $0*1*2 + 1*2*3 + 2*3*4 + ... + (n - 1)*n*(n + 1) = \frac{1}{4}(n^2 + n)*(n^2 + n - 2)$

Satz 35: $1*2*3 + 3*4*5 + ... + (2n - 1)*2n*(2n + 1) = n(n + 1)*(2n^2 + 2n - 1)$

Satz 36: Eine n-elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen.

Satz 37: $2*n^2 \geq (n + 1)^2$ ist gültig $\forall\ n \in \boldsymbol{N}$ mit $n \geq 3$

Satz 38: $2^n > n^2$ ist gültig $\forall\ n \in \boldsymbol{N}$ mit $n \geq 5$

Satz 39: $8^n - 1$ ist durch 7 teilbar.