Übungen zur Vollständigen Induktion

Diese wahren Sätze können alle mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden.

Satz 1: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{1(1+1)}{2} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \overset{(n+1)\ ausklammern}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Satz 2: $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} 1(1+1) = 2$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 2+4+6+...+2n+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1)$$

$$\overset{(n+1)\ ausklammern}{=} (n+1)(n+2)$$

Satz 3: $a + 2a + 3a + ... + na = a * \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $a \in \Re$

Lösung: a ausklammern; danach wie bei Satz 1 vorgehen.

Satz 4: $3 + 7 + 11 + ... + (4n - 1) = 2n^2 + n$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 3+7+11+...+(4n-1)+[4(n+1)-1] = 2n^2+n+[4(n+1)-1]$$

$$= 2n^2+n+4n+3 \overset{Zerlegung}{=} (2n^2+4n+2)+(n+1) \overset{Binom}{=} 2(n+1)^2+(n+1)$$

Satz 5: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} 1^2 = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1+3+5+\ldots+(2n-1)+[2(n+1)-1] = n^2+[2(n+1)-1]$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} n^2+2n+2-1 \overset{Binom}{=} (n+1)^2$$

Satz 6: $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} 2(2^1-1) = 2$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 2+4+8+\ldots+2^n+2^{(n+1)} = 2\cdot(2^n-1)+2^{(n+1)}$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} 2\cdot 2^n-2+2^{(n+1)} \overset{1.\ Potenzgesetz}{=} 2^{n+1}-2+2^{(n+1)}$$

$$\overset{zusammenfasen}{=} 2\cdot 2^{n+1}-2 \overset{"2"\ ausklammern}{=} 2\cdot(2^{n+1}-1)$$

Satz 7: $1 + 5 + 25 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{5^n-1}{4}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{5^1-1}{4} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1+5+25+\ldots+5^{n-1}+5^n = \frac{5^n-1}{4}+5^n \overset{Hauptnenner}{=} \frac{(5^n-1)+4\cdot 5^n}{4}$$

$$\overset{zusammenfassen}{=} \frac{5\cdot 5^n-1}{4} \overset{1.\ Potenzgesetz}{=} \frac{5^{n+1}-1}{4}$$

Satz 8: $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für alle $q \in \Re\backslash\{1\}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.:

$$\xrightarrow{n=1} \frac{q^{1+1}-1}{q-1} = \frac{q^2-1}{q-1} \overset{3.\ Binom}{=} \frac{(q-1)(q+1)}{q-1} \overset{kürzen}{=} q+1 \qquad \text{I.A. erfüllt.}$$

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1+q+q^2+...+q^n+q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}+q^{n+1} \overset{Hauptnenner}{=} \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1}$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \overset{zusammenfassen}{=} \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$$

Satz 9: $1*2 + 2*3 + 3*4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3} = 2$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)+(n+1)\cdot(n+2)$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}+(n+1)\cdot(n+2)$$

$$\overset{Hauptnenner}{=} \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+3(n+1)\cdot(n+2)}{3}$$

$$\overset{zusammenfassen}{=} \frac{(n+3)\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3} \overset{anordnen}{=} \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3}$$

Satz 10: $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\overset{Hauptnenner}{=} \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \overset{ausklammern}{=} \frac{(n+1)\cdot[n\cdot(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} \frac{(n+1)\cdot[2n^2+7n+6]}{6} \overset{Linearfaktorzerlegung}{=} \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$$

Satz 11: $1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \dfrac{1\cdot(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)}{3} = \dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{3} = 1$

I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+[2(n+1)-1]^2 = \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}+(2n+1)^2$$

$$\overset{Hauptnenner}{=} \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)+3(2n+1)^2}{3} \overset{ausklammern}{=} \frac{(2n+1)\cdot[n\;(2n-1)+3(2n+1)]}{3}$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} \frac{(2n+1)\cdot[2n^2+5n+3]}{3} \overset{Linearfaktorzerlegung}{=} \frac{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}{3}$$

Satz 12: $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\, n^2 = (-1)^{n-1}\,\dfrac{n\,(n+1)}{2}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} (-1)^{1-1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = (-1)^0 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 + (-1)^n \cdot (n+1)^2$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + (-1)^n \cdot (n+1)^2$$

$$\overset{Hauptnenner}{=} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n\,(n+1) + (-1) \cdot 2(n+1)^2}{2}$$

$$\overset{ausklammern}{=} (-1)^{n-1} \cdot (n+1) \cdot \frac{n - 2(n+1)}{2}$$

$$\overset{zusammenfassen}{=} (-1)^{n-1} \cdot (n+1) \cdot \frac{(-1)(n+2)}{2} = (-1)^n \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Satz 13: $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{1^2\,(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\overset{Hauptnenner}{=} \frac{n^2\,(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \overset{ausklammern}{=} (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4(n+1)}{4}$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \overset{1.\ Binom}{=} \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$$

Satz 14: $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=0} \quad 2-\frac{1}{2^0} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} \overset{1.\,Potenzgesetz}{=} 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2\cdot 2^n}$$

$$\overset{\frac{1}{2^n}\,ausklammern}{=} 2+\frac{1}{2^n}\left(-1+\frac{1}{2}\right) = 2+\frac{1}{2^n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \overset{zusammenfassen}{=} 2-\frac{1}{2^{n+1}}$$

Satz 15: $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \overset{Hauptnenner}{=} \frac{n(n+2)+1}{(n+1)\,(n+2)}$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\,(n+2)} \overset{1.\,Binom}{=} \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)} \overset{kürzen}{=} \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Satz 16: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \overset{\text{Linearfaktorzerlegung}}{=} \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{(n+1)}{(2n+3)}$$

Satz 17: $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{1}{3\cdot 1+1} = \frac{1}{4}$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$= \frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \overset{\text{Linearfaktorzerlegung}}{=} \frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{(n+1)}{(3n+4)}$$

Satz 18: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=0} 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$\overset{\text{zusammenfassen}}{=} 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \overset{\text{1. Potenzgesetz}}{=} 2^{n+2} - 1$$

Satz 19: $9^n - 1$ ist durch 8 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} 9^1 - 1 = 8$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} 9^{n+1} - 1 = 9 \cdot 9^n - 1 \overset{\text{Ergänzung}}{=} 9 \cdot 9^n - 1 + 9 - 9$$

$$\overset{\text{zusammenfassen}}{=} 9 \cdot 9^n - 9 + 8 \overset{\text{ausklammern}}{=} 9 \cdot \left(9^n - 1\right) + 8$$

Erklärung: $9^n - 1$ ist durch 8 teilbar (I.A.); das Neunfache davon ja auch; die Addition mit 8 führt ebenfalls zu einer durch 8 teilbaren Zahl!

Satz 20: $3^{2n} - 1$ ist durch 8 teilbar.

Lösung: vgl. Satz 19; da $3^{2n} = 9^n$ gilt.

Satz 21: $9^{n+1} - 1$ ist durch 4 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 9^{1+1} - 1 \;=\; 80 \quad \xrightarrow{:4} \quad 20$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad 9^{n+2} - 1 \;=\; 9 \cdot 9^{n+1} - 1 \;\overset{\text{Ergänzung}}{=}\; 9 \cdot 9^{n+1} - 1 + 9 - 9$$

$$\overset{\text{zusammenfassen}}{=} \quad 9 \cdot 9^{n+1} - 9 - 1 + 9 \quad \overset{\text{ausklammern}}{=} \quad 9 \cdot \left(9^{n+1} - 1\right) + 8$$

Erklärung: $9^{n+1} - 1$ ist durch 4 teilbar (I.A.); das Neunfache davon ja auch; die Addition mit 8 führt ebenfalls zu einer durch 4 teilbaren Zahl!

Satz 22: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 1^3 - 1 \;=\; 0$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad (n+1)^3 - (n+1) \;=\; n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \;=\; \left(n^3 - n\right) + \left(3n^2 + 3n\right)$$

$\left(n^3 - n\right)$ ist laut I.A. durch 6 teilbar.

$$\left(3n^2 + 3n\right) \;=\; 3\left(n^2 + n\right)$$

$\rightarrow \quad n^2 + n$ muss gerade sein; denn $3 \cdot$"gerade Zahl" ist durch 6 teilbar.

Beweis:

Fall 1: n gerade: n = 2k

$$n^2 + n \quad \xrightarrow{n=2k} \quad (2k)^2 + 2k \;=\; 4k^2 + 2k \;=\; 2\left(2k^2 + k\right)$$

$\rightarrow \quad n^2 + n$ ist gerade

Fall 2: n ungerade: n = 2k+1

$$n^2 + n \quad \xrightarrow{n=2k+1} \quad (2k+1)^2 + 2k + 1 \;=\; 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 \;=\; 4k^2 + 6k + 2$$

$$=\; 2\left(2k^2 + 3k + 1\right) \quad \rightarrow \quad n^2 + n \text{ ist gerade}$$

Satz 23: $3n^2 + 15n + 6$ ist durch 6 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 3\cdot 1^2 + 15\cdot 1 + 6 \quad = \quad 24$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad 3(n+1)^2 + 15(n+1) + 6$$

$$= \quad 3n^2 + 6n + 3 + 15n + 15 + 6 \quad = \quad \left(3n^2 + 15n + 6\right) + \left(6n + 18\right)$$

$\left(3n^2 + 15n + 6\right)$ ist laut I.A. durch 6 teilbar.

$\left(6n + 18\right) \quad = \quad 6\left(n+3\right)$ ist immer durch 6 teilbar.

Satz 24: $n(n+1)(n+5)$ ist durch 6 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 1\cdot(1+1)(1+5) \quad = \quad 1\cdot 2\cdot 6 \quad = \quad 12$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad (n+1)(n+2)(n+6)$$

$$= \quad n^3 + 9n^2 + 20n + 12 \quad = \quad \left(n^3 + 6n^2 + 5n\right) + \left(3n^2 + 15n + 12\right)$$

$\left(n^3 + 6n^2 + 5n\right)$ ist laut I.A. durch 6 teilbar.

$\left(3n^2 + 15n + 12\right) \quad = \quad 3\left(n^2 + 5n + 4\right)$ ist immer durch 3 teilbar.

$\rightarrow \quad n^2 + 5n + 4$ muss gerade sein; denn $3\cdot$"gerade Zahl" ist durch 6 teilbar.

Beweis:

Fall 1: n gerade: n = 2k

$$n^2 + 5n + 4 \quad \xrightarrow{n=2k} \quad (2k)^2 + 5\cdot 2k + 4 \quad = \quad 4k^2 + 10k + 4 \quad = \quad 2\left(2k^2 + 5k + 2\right)$$

$\rightarrow \quad n^2 + 5n + 4$ ist gerade

Fall 2: n ungerade: n = 2k+1

$$n^2 + 5n + 4 \quad \xrightarrow{n=2k+1} \quad (2k+1)^2 + 5\cdot(2k+1) + 4 \quad = \quad 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 4$$

$$= \quad 4k^2 + 14k + 10 \quad = \quad 2\left(2k^2 + 7k + 5\right) \quad \rightarrow \quad n^2 + 5n + 4 \text{ ist gerade}$$

Satz 25: $n^3 + 5n$ ist durch 3 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 1^3 + 5\cdot 1 \;=\; 6$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad (n+1)^3 + 5(n+1)$$

$$= \quad n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \quad = \quad \left(n^3 + 5n\right) + \left(3n^2 + 3n + 6\right)$$

$\left(n^3 + 5n\right)$ ist laut I.A. durch 3 teilbar.

$\left(3n^2 + 3n + 6\right) \;=\; 3\left(n^2 + n + 2\right)$ ist immer durch 3 teilbar.

Satz 26: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Kuben ist durch 3 teilbar.
Oder: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 3 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 \;=\; 36$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$$

$$= \quad (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27$$

$$= \quad \left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] + \left(9n^2 + 27n + 27\right)$$

$\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right]$ ist laut I.A. durch 3 teilbar.

$\left(9n^2 + 27n + 27\right) \;=\; 3\left(3n^2 + 9n + 9\right)$ ist immer durch 3 teilbar.

Satz 27: $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ ist eine natürliche Zahl.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \frac{1}{6}+\frac{1^2}{2}+\frac{1^3}{3} = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = 1$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} \frac{n+1}{6}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}$$

$$= \frac{n+1}{6}+\frac{n^2+2n+1}{2}+\frac{n^3+3n^2+3n+1}{3}$$

$$= \frac{n}{6}+\frac{1}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{2n+1}{2}+\frac{n^3}{3}+\frac{3n^2+3n+1}{3}$$

$$= \left(\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{2n+1}{2}+\frac{3n^2+3n+1}{3}\right)$$

$\left(\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}\right)$ ist laut I.A. eine natürliche Zahl.

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{2n+1}{2}+\frac{3n^2+3n+1}{3}\right) \underset{\text{umordnen}}{\overset{\text{aufteilen}}{=}} \frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2n}{2}+\frac{3n^2+3n}{3}$$

$$\underset{\text{kürzen}}{\overset{\text{zusammenfassen}}{=}} 1+n+n^2+n = 1+n^2+2n$$ ist auch eine natürliche Zahl.

Satz 28: $2^n \geq n+1$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} 2^1 = 2 \geq 1+1=2$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq (n+1)\cdot 2$$

$$= 2n+2 > n+2 = (n+1)+1$$

Satz 29: $(1 + a)^n \geq 1 + na$ für alle $a > -1$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} (1+a)^1 = 1+a \geq 1+1\cdot a = 1+a$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} (1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+n\cdot a)\cdot(1+a)$$

$$\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} (1+n\cdot a)+a(1+n\cdot a)$$

$$\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} (1+n\cdot a)+a+na^2 \overset{na^2>0}{>} (1+n\cdot a)+a = 1+(n+1)a$$

Sätze 30 – 32 sind noch nicht ausgearbeitet.

In dringenden Fällen einfach mailen ;-))

Satz 33: $\sum_{x=1}^{n}\left[3x(x+2)\right] = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+7)$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: I.A. erfüllt.

$$\xrightarrow{n=1} \sum_{x=1}^{1}\left[3x(x+2)\right] = 3\cdot 1(1+2) = 9 = \frac{1}{2}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+7) = 9$$

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n\to n+1} \sum_{x=1}^{n+1}\left[3x(x+2)\right] = \sum_{x=1}^{n}\left[3x(x+2)\right] + \left[3(n+1)(n+3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+7) + \left[3(n+1)(n+3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\left[2n^2+7n + 6n+18\right]$$

$$\overset{\text{ausklammern}}{=} \frac{1}{2}(n+1)\left[2n^2+13n+18\right] \overset{\text{Linearfaktorzerlegung}}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)(2n+9)$$

Satz 34: 0*1*2 + 1*2*3 + 2*3*4 + ... + (n - 1)*n*(n + 1) = $\frac{1}{4}$ (n² + n)*(n² + n - 2)

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1}$ $\frac{1}{4}\left(1^2+1\right)\left(1^2+1-2\right)=0 \quad = \quad 0$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$\xrightarrow{n\to n+1}$ Berechnung von linker Seite:

$$0\cdot 1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

$$= \frac{1}{4}\left(n^2+n\right)\left(n^2+n-2\right)+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

$$= \frac{1}{4}\left(n^2+n\right)\left(n^2+n-2\right)+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

$$\overset{ausklammern}{=} \frac{1}{4}\left(n^2+n\right)\left[\left(n^2+n-2\right)+4(n+2)\right] \overset{zusammenfassen}{=} \frac{1}{4}\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} \frac{1}{4}\left[n^4+6n^3+11n^2+6n\right]$$

Berechnung von rechter Seite:

$$\frac{1}{4}\left[(n+1)^2+n+1\right]\left[(n+1)^2+n+1-2\right] = \frac{1}{4}\left[(n+1)^2+n+1\right]\left[(n+1)^2+n-1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[n^2+2n+1+n+1\right]\left[n^2+2n+1+n-1\right] = \frac{1}{4}\left[n^2+3n+2\right]\left[n^2+3n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[n^4+6n^3+11n^2+6n\right]$$

Satz 35: 1*2*3 + 3*4*5 + ... + (2n - 1)*2n*(2n + 1) = n(n + 1)*(2n² + 2n - 1)

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1}$ $1(1+1)\left(2\cdot 1^2+2\cdot 1-1\right)=6 \quad = \quad 1\cdot 2\cdot 3=6$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$\xrightarrow{n\to n+1}$ Berechnung von linker Seite:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)+(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)$$

$$= \quad n(n+1)\left(2n^2+2n-1\right)+(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)$$

$$\overset{ausklammern}{=} \quad (n+1)\left[n\cdot\left(2n^2+2n-1\right)+(2n+1)\cdot 2\cdot(2n+3)\right]$$

$$\overset{zusammenfassen}{=} \quad (n+1)\left[\left(2n^3+2n^2-n\right)+(4n+2)\cdot(2n+3)\right]$$

$$\overset{ausmultiplizieren}{=} \quad (n+1)\left[2n^3+2n^2-n+8n^2+16n+6\right]$$

$$\overset{zusammenfassen}{=} \quad (n+1)\left[2n^3+10n^2+15n+6\right] \quad = \quad 2n^4+12n^3+25n^2+21n+6$$

Berechnung von rechter Seite:

$$(n+1)(n+2)\left[2(n+1)^2+2n+2-1\right] \quad = \quad \left(n^2+3n+2\right)\left(2n^2+6n+3\right)$$

$$= \quad 2n^4+12n^3+25n^2+21n+6$$

Satz 36: Eine n-elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen.

Lösung:

Schritt 1: I.A.:

$\xrightarrow{n=1}$ $2^1=2[Teilmengen] \quad \to \quad \Omega\ und\ \varnothing$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

Es gibt eine Menge M, die x_0 nicht enthält und die Mächtigkeit n hat. Nun fügt man ein Element x_0 zu M hinzu und erhält die Menge $A := M \cup \{x_0\}$und $|A| = n+1$

Jede Teilmenge $T \subset A$ enthält also entweder x_0 oder kein x_0.

Nach Konstruktion von A ist klar, dass jede Teilmenge, die x_0 nicht enthält, eine Teilmenge von M ist. Und davon gibt es nach Induktionsvoraussetzung genau 2^n.

Alternative:

Sei M eine n-elementige Menge, und sei m ein beliebiges Element aus M. Es gibt zwei Sorten von Teilmengen von M: Solche, die m enthalten, und solche, die m nicht enthalten.

Die Teilmengen von M, die m nicht enthalten, sind genau die Teilmengen von M\{m}; davon gibt es nach Induktion genau 2^n viele.

Für jede Teilmenge M', die m enthält, ist M'\{m} eine Teilmenge von M\{m} und umgekehrt. Also gibt es auch hiervon 2^n Stück.

Insgesamt gibt es also $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen von M.

Satz 37: $2 * n^2 \geq (n+1)^2$ ist gültig $\forall \; n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 3$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=3} \quad 2 \cdot 3^2 = 18 \quad > \quad (3+1)^2 = 16$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad 2 \cdot (n+1)^2 \quad = \quad 2n^2 + 4n + 2 \quad \geq \quad (n+1)^2 + 4n + 2$$

$$\geq \quad n^2 + 2n + 1 + 2n + 2n + 2$$

$$\overset{2n \geq 1}{\geq} \quad n^2 + 2n + 1 + 2n + 1 + 2 \quad = \quad (n+2)^2$$

Satz 38: $2^n > n^2$ ist gültig $\forall \; n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 5$

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=5} \quad 2^5 = 32 \quad > \quad 5^2 = 25$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad 2^{n+1} \quad = \quad 2^n \cdot 2 \quad \geq \quad n^2 \cdot 2 \quad \overset{n^2 \geq 2n+1}{\geq} \quad n^2 + 2n + 1 \quad = \quad (n+1)^2$$

Satz 39: $8^n - 1$ ist durch 7 teilbar.

Lösung:

Schritt 1: I.A.: $\xrightarrow{n=1} \quad 8^1 - 1 \;=\; 7$ I.A. erfüllt.

Schritt 2: I.S.:

$$\xrightarrow{n \to n+1} \quad 8^{n+1} - 1 \;=\; 8 \cdot 8^n - 1 \;\overset{\text{Ergänzung}}{=}\; 8 \cdot 8^n - 1 + 8 - 8$$

$$\overset{\text{zusammenfassen}}{=} \quad 8 \cdot 8^n - 8 + 7 \quad \overset{\text{ausklammern}}{=} \quad 8 \cdot \left(8^n - 1\right) + 7$$

Erklärung: $8^n - 1$ ist durch 7 teilbar (I.A.); das Achtfache davon ja auch;
die Addition mit 7 führt ebenfalls zu einer durch 7 teilbaren Zahl!