

Übungen: Exponentielle Wachstum- und Abnahmeprozesse

Exponentielles Wachstum

1.) Ein Kapital von 1.000,00 € wird mit 8% Zinsen angelegt.

- In welcher Zeit verdoppelt sich das Kapital?
- Zeigen Sie, dass die Verdopplungszeit nicht davon abhängt, wie groß das Anfangskapital ist!

2.) Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1.000 Bakterien.

Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich jede Stunde.

- Stellen Sie die Anzahl der Bakterien nach t Stunden als Funktion der Zeit dar.
- Wie viele Bakterien sind nach 2,5 Stunden vorhanden?
- Wann wird sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht haben?
- Das Wachstum der Bakterien lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

beschreiben (N_0 = Anfangswert). Berechnen Sie die Konstante λ !

3.) Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,5%.

Derzeit beträgt sie 12 Millionen.

- Wie groß wird die Bevölkerung in 10 Jahren sein?
- Wann wird das Land 15 Millionen Einwohner haben?
- Der Bevölkerungszuwachs lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

beschreiben (N_0 = Anfangswert). Berechne die Konstante λ !

4.) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

1960 gab es ca. 3 Mrd. Menschen, 1995 ca. 5,6 Mrd.

- Bestimmen Sie die Konstante λ !
- Wie viel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
- Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?

5.) Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7.000 m^3 . Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf 9.880 m^3 angewachsen. Man darf annehmen, dass das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.

- Zeigen Sie, dass die jährliche Wachstumsrate ca. 3,5% beträgt.
- Berechnen Sie die Zeitspanne, innerhalb der sich der Holzbestand verdoppelt bzw. verdreifacht.
- In drei Jahren möchte man 3.000 m^3 Holz zu schlagen. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?

6.) Ein Lichtstrahl, der ins Wasser fällt, wird pro Meter Wassertiefe um 10% schwächer.

- Stellen Sie die Lichtstärke $L(x)$ als Funktion der Wassertiefe dar (Tiefe in Metern = x , Lichtstärke an der Oberfläche = L_0).
- Wie stark ist das Licht in 10 m Tiefe?
- In welcher Tiefe beträgt die Lichtstärke nur mehr ein Zehntel des ursprünglichen Wertes?

7.) Der radioaktive Zerfall eines Elements lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

beschreiben (N_0 = Anfangswert). Die Zeit τ , in der von einer vorhandenen Stoffmenge die Hälfte zerfällt, heißt Halbwertszeit.

Für Radium beträgt sie z.B. 1.620 Jahre.

- Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ !
- Wie viel war von dem ersten Gramm Radium, das Marie Curie 1898 herstellte, nach 100 Jahren noch übrig?
- Wann wird nur mehr 0,1 g vorhanden sein?

8.) Das Kohlenstoffisotop ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5.730 Jahren. Mit seiner Hilfe lässt sich das Alter von Fossilien bestimmen.

- Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ !
- In einem Fossil wurde ein ^{14}C -Gehalt von 7,5% der ursprünglichen Menge gemessen. Berechnen Sie das Alter des Fossils (runde auf 1.000 Jahre).
- Bis zu welchem Alter lässt sich die ^{14}C -Methode anwenden, wenn man noch 0,1% des ursprünglichen ^{14}C -Gehalts mit hinreichender Genauigkeit messen kann?

9.) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Element	Halbwertszeit	Konstante λ	Abnahme pro Zeiteinheit in %	Wann ist noch 1% übrig?
Radium	1.620 Jahre			
Caesium 137		-0,0231 / Jahr		
Phosphor 32		-0,0485 / Tag		
Jod 131	8 Tage			
Polonium 218			20% / Minute	

10.) Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert. Angenommen, die Vermehrung erfolgt exponentiell, d.h. nach der Formel

$$B(t) = a \cdot e^{\lambda t}$$

(a ist der Anfangswert).

- Berechnen Sie die Konstante λ !
- Wie viel Prozent beträgt die jährliche Vermehrung?
- Wann hat sich die Population verdoppelt bzw. vervierfacht?

Ergebnisse (Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse)

1.

a) ca. 9 Jahre b) $2K_0 = K_0 \cdot 1,08^t \xrightarrow{\cdot \frac{1}{K_0}} \frac{2}{1,08^t} \rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1,08}$

2.

a) $B(t) = 1.000 \cdot 2^t$ b) 5657
 c) nach 3,3 Stunden d) 0,6931

3.

a) 13,9 Mill. b) in 15 Jahren c) 0,0149

4.

a) 0,0178 b) 1,8% c) ca. 2.050

5.

a) $7.000 \cdot 1,035^{10} \approx 9.880$ b) ca. 20 Jahre bzw. ca. 32 Jahre
 c) in 9,3 Jahren (6,3 Jahre nach der Schlägerung)

6.

a) $L(x) = L_0 \cdot 0,9^x$ b) ca. 35% des ursprünglichen Werts
 c) ca. 22 m

7.

a) -0,000428/Jahr b) 0,958 g
 c) nach 5382 Jahren (im Jahr 7280)

8.

a) -0,000121/Jahr b) ca. 21.000 Jahre
 c) ca. 57.000 Jahre

9.

Radium	1620 J.	-0,000428/Jahr	0,043 %	nach 10.763 J.
Caesium 137	30 J.	-0,0231/Jahr	2,28 %	nach 199 J.
Phosphor 32	14,3 T.	-0,0485/Tag	4,73%	nach 95 T.
Jod 131	8 T.	-0,08664/Tag	8,3 %	nach 53 T.
Polonium 218	3,1 Min.	-0,2231/min	20 %	nach 20,6 Min.

10.

a) 0,0446/Jahr b) 4,56% c) 15,5 Jahre bzw. 31 Jahre