Übungen: Exponentielle Wachstum- und Abnahmeprozesse

Begrenztes und Logistisches Wachstum

1.) Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert.
In der Realität ist unbegrenztes Wachstum nicht möglich. Wenn die Zahl der Tiere nach oben begrenzt ist (begrenztes Wachstum), lässt sich die Vermehrung besser durch folgende Gleichung beschreiben:

$$B(t) = G - (G - a) \cdot e^{-\lambda t}$$

(a ist der Anfangswert, G die obere Grenze)
Angenommen, die Tierpopulation vermehrt sich nach dieser Formel mit G = 1.000.
Ermitteln Sie λ und berechnen Sie, wann sich die Population verdoppelt hat!

2.) Die beste Näherung erhält man durch folgende Gleichung (logistisches Wachstum):

$$B(t) = \frac{a \cdot G}{a + (G - a) \cdot e^{-G\lambda t}}$$

Mit den Angaben von oben erhält man: λ = 0,0000575 (Kontrolle!)
Wie lange braucht die Population unter diesen Voraussetzungen, um sich zu verdoppeln?

3.) Eine Tasse kochendheißer Kaffee (100° C) kühlt bei Zimmertemperatur (20° C) in 10 Minuten auf 30° C ab.

a) Die Temperatur nach t Minuten wird durch die Gleichung

$$T(t) = 20 + (T_0 - 20) \cdot e^{-\lambda t}$$

angegeben. Berechne die Konstante λ!

b) Frau Mogel mischt den Kaffee mit der gleichen Menge Milch aus dem Kühlschrank (4° C). Sie hat zwei Möglichkeiten:

- die Milch sofort dazugeben, danach 3 Minuten warten
- die Milch erst nach 3 Minuten dazugeben

Welche Temperatur hat der Milchkaffee in beiden Fällen?

Anmerkung: Die Temperatur der Mischung ist der Mittelwert der einzelnen Temperaturen: $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$

4.) In einer Bakterienpopulation werden 20 Individuen gezählt. Am nächsten Tag sind es bereits 24 Bakterien. Aufgrund des Platzbedarfes und des Nahrungsangebots wird die maximale Anzahl an Bakterien auf 350 geschätzt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl f(**t**) der Bakterien nach **t** Tagen, wenn logistisches Wachstum angenommen werden kann.

b) Zeichne ein Schaubild des Wachstumsvorganges

c) Nach wie vielen Tagen ist die Population auf 95 % ihres Endbestandes gewachsen?

d) Nach wie vielen Tagen ist die momentane Wachstumsrate am größten?

Ergebnisse (Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse)

Lösung zu 1.) λ = 0,0129/Jahr; 22 Jahre

Lösung zu 2.) 17 Jahre

Lösung zu 3.) a) 0,208/min b) 37,1° bzw. 33,4°

Lösung zu 4.)

Das logistische Wachstum hat die Form $f(t) = \dfrac{a \cdot G}{a + (G-a) \cdot e^{-G\lambda t}}$

Die Sättigungsmenge G ist in unserem Fall 350.

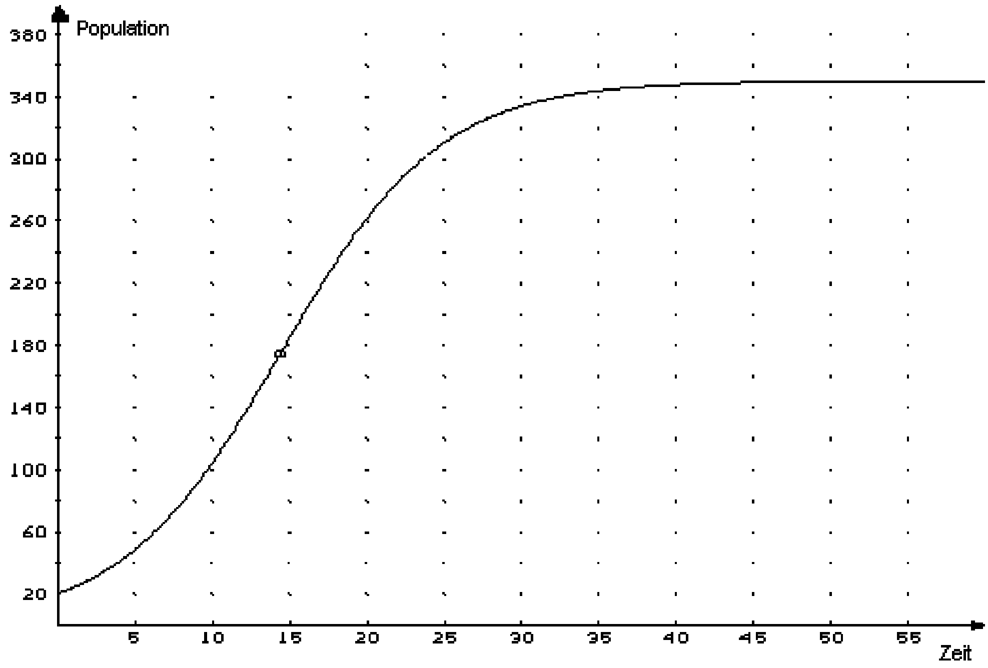
Da zum Zeitpunkt **t** =0 nur 20 Bakterien gezählt werden, gilt f(0) = 20 = a.

Da am ersten Tag schon 24 Bakterien gezählt werden, gilt f (1) = 24, also:

$$24 = \frac{20 \cdot 350}{20 + (350-20) \cdot e^{-350 \cdot \lambda \cdot 1}} \Rightarrow \lambda = 0{,}000555762$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{700}{2 + 33 \cdot e^{-0{,}1945167\, t}}$$

Das Schaubild sieht dann folgendermaßen aus:



b) Gesucht wird die Zeit **t** für

$$332{,}5 \quad = \quad \frac{700}{2+33\cdot e^{-0{,}1945167\,t}} \quad \Rightarrow \quad t \quad = \quad 29{,}55[Tage]$$

Durch Ausrechnen erhält man für t = 29,55 Tage, also 29 Tage 13 Stunden 20 Minuten.

c) Maximale Wachstumsrate erhält man über die zweite Ableitung.

Löst man wieder nach **t** auf, so erhält man **t** = 14,41 Tage

Anmerkung:

Logistisches Wachstum aus der Differentialgleichung: $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (G - f(t))$

Weitere Darstellung der logistischen Wachstumsfunktion:

$$f(t) = G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k\cdot G\cdot t}\left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)}$$

$$f(t) = G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k\cdot G\cdot t}\cdot \frac{G}{f(0)} - e^{-k\cdot G\cdot t}} \cdot \frac{f(0)}{f(0)} = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + e^{-k\cdot G\cdot t}\cdot G - e^{-k\cdot G\cdot t}\cdot f(0)}$$

$$f(t) = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + (G - f(0)) \cdot e^{-k\cdot G\cdot t}}$$

Berechung des Wendepunkts:

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (G - f(t))$$
$$f''(t) = k \cdot f'(t) \cdot (G - f(t)) + k \cdot f(t) \cdot (-f'(t)) = k \cdot f'(t) \cdot (G - f(t) - f(t))$$
$$f''(t) = k \cdot f'(t) \cdot (G - 2 \cdot f(t))$$
$$f''(t_W) = k \cdot f'(t_W) \cdot (G - 2 \cdot f(t_W)) = 0$$
$$G - 2 \cdot f(t_W) = 0$$
$$G = 2 \cdot f(t_W)$$
$$f(t_W) = \frac{G}{2}$$

Im Wendepunkt überschreitet die Population gerade die halbe Sättigungsgrenze.

$$G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t_W} \cdot \left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)} = \frac{G}{2}$$

=> $$2 = 1 + e^{-k \cdot G \cdot t_W} \cdot \left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)$$

=> $$1 = e^{-k \cdot G \cdot t_W} \left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)$$

=> $$e^{k \cdot G \cdot t_W} = \left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)$$

=> $$k \cdot G \cdot t_W = \ln\left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)$$ => $$t_W = \frac{\ln\left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)}{k \cdot G}$$

Durch Einsetzen von $f(t_W) = \frac{G}{2}$ in die erste Ableitung erhält man die maximale Wachstumsgeschwindigkeit:

$$f'(t_W) = k \cdot \frac{G}{2} \cdot \left(G - \frac{G}{2}\right) = k \cdot \frac{G}{2} \cdot \frac{G}{2}$$ => $$f'(t_W) = \frac{k \cdot G^2}{4}$$