11. Jgst.	**4. Klassenarbeit**	**Datum: 07.06.2024**
Klasse: GY 23 a	**Fach: Mathematik (Kernfach)**	

Thema: Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen; Unteruchung gebr.-rat. Funktionen

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Ableitungen

14	

Bilden Sie die erste Ableitung der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^3$ $\qquad f'(x) = 2x^3 - \frac{3}{5}x^2$

b) $f(x) = -6x^{2n} + 3x^n - 9$ $\qquad f'(x) = -12nx^{2n-1} + 3nx^{n-1}$

c) $f(x) = x^3(8x^2 - 4x)$ $\qquad f'(x) = 40x^4 - 16x^3$

d) $f(x) = \frac{2}{x^3}$ $\qquad f'(x) = -\frac{6}{x^4}$

2.) Kurvenuntersuchung

26	

Bestimmen Sie

(i) die Symmetrie
(ii) Nullstellen
(iii) die Extremwerte
(iv) die Monotonie-Intervalle
(v) die Wendepunkte

bei folgender Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

Lösung:

Symmetrie: Achsensymmetrie da gilt:

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = f(x)$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right)x^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x^2 = 2$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad und \quad x = 0\,[doppelt]$$

Extrema:

$$f'(x) = x^3 - x = 0 \rightarrow (x^2-1)x = 0 \rightarrow x = \pm 1 \quad und \quad x = 0$$

$$f''(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f''(0) = -1 < 0 \rightarrow MAX(0 \mid 0)$$

$$\rightarrow MIN\left(\pm 1 \,\middle|\, -\frac{1}{4}\right) \quad [Achsensymmetrie!]$$

Monotonie-Intervalle:

$$I_1 =]-\infty; -1[\quad monoton\ fallend \quad Grund: Minimum$$

$$I_2 =]-1; 0[\quad monoton\ steigend \quad Grund: Maximum$$

$$I_3 =]0; 1[\quad monoton\ fallend \quad Grund: Minimum$$

$$I_4 =]1; \infty[\quad monoton\ steigend$$

Wendepunkte

$$f''(x) = 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f'''(x) = 6x \rightarrow f'''\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0 \rightarrow WP\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \,\middle|\, -\frac{5}{36}\right) \quad [Achsensymmetrie!]$$

3.) Steigungen und Tangente(n) | **8** | |

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$

a) Berechnen Sie die Tangente in x = 2 an die Funktion

b) An welchen Stellen hat die Funktion eine Tangente mit folgender Gleichung: $t(x) = 4x + b \quad mit \quad b \in \Re$

Lösung:

Tangente:

$$f(2) = \frac{4}{3} - 2 + 2 = \frac{4}{3} \quad und \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \rightarrow f'(2) = 0 = m$$

$$Gleichung: \ t(x) = \frac{4}{3}$$

Stellen finden mit Steigung m = 4:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = 4 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = 1 \pm 3 \rightarrow x_1 = 4 \quad und \quad x_2 = -2$$

4.) **Kurvenuntersuchung gebrochen-rationaler Funktionen**

20	

Teil A: Untersuchen Sie nun die Funktion mit $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2-8}$

a) Berechnen Sie die Zähler- und Nennernullstellen.

b) Legen Sie die Definitionsmenge fest.

c) Wo liegt die Nullstelle der Funktion?

d) Bestimmen Sie die senkrechten Polstellen.

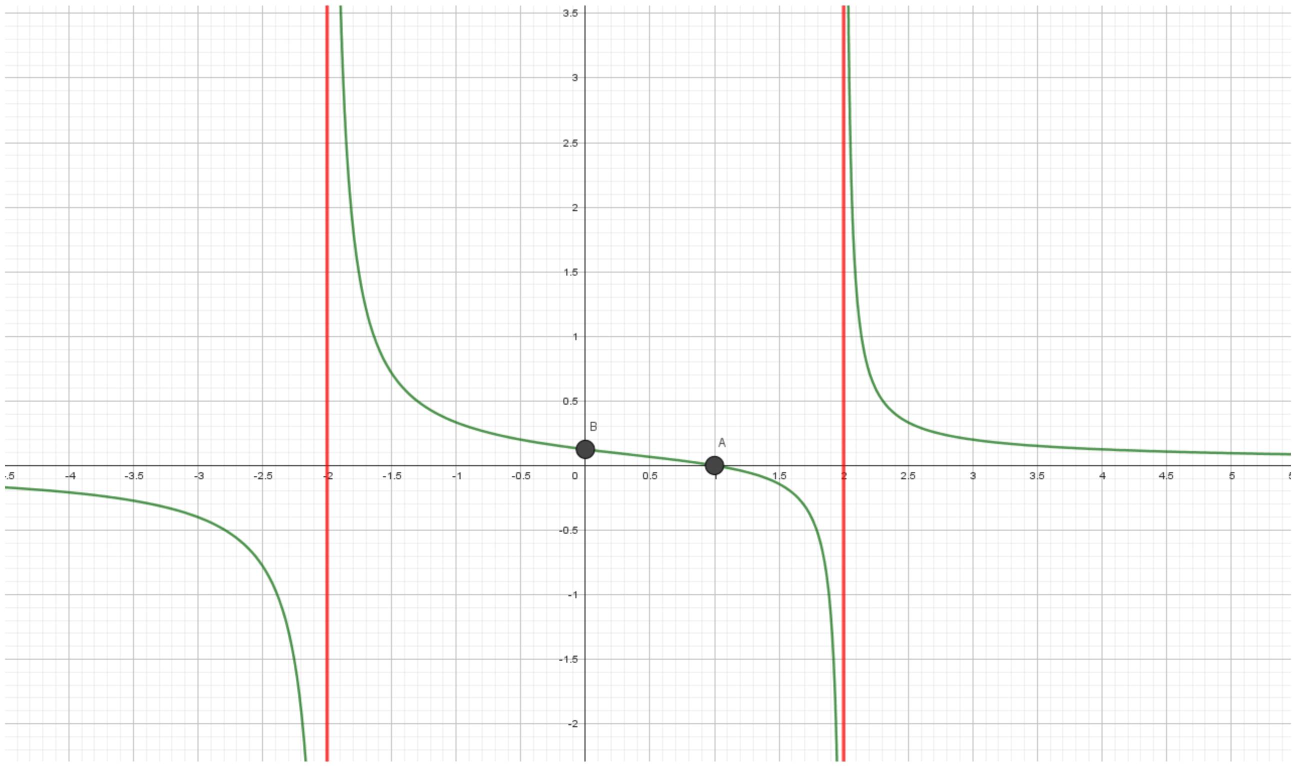
e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion aufgrund Ihrer Ergebnisse.

Lösung:

Zählernullstelle	*Nennernullstellen*
$x-1=0$	$2x^2-8=0$
$x=1$	$2x^2=8$
	$x^2=4 \quad \rightarrow \quad x=\pm 2$

$$\textit{Definitionsmenge}: \quad D=\Re\setminus\{\pm 2\}$$

$$\textit{Nulstelle}: \quad x=1 \qquad \textit{Pol mit VZW}: \quad x=\pm 2$$



ZUATZFRAGE: Was versteht man unter einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel?

4	

Eine Polstelle ohne VZW bedeutet, dass der Verlauf auf beiden Seiten entlang der Polvertikalen in die gleiche Richtung verläuft (entweder gegen $\pm\infty$ ***bzw. die Funktion hat an dieser Stelle den identischen links- und rechtseitigen Grenzwert).***

10	

Teil B:

Ordnen Sie den Funktionen $g(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$ und $k(x)=\dfrac{x-2}{4-x}$

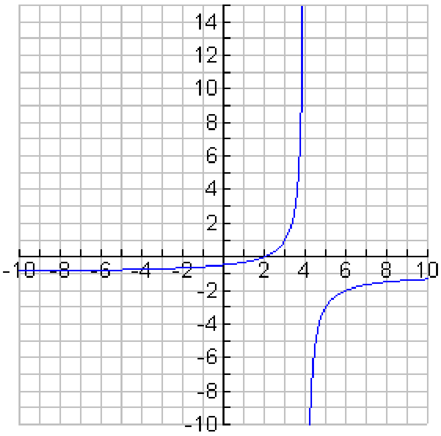
ihre Graphen zu und begründen Sie Ihre Wahl anhand von drei Kriterien.

$$k(x)=\frac{x-2}{4-x}$$

Polstelle mit VZW bei x = 4

Nullstellen bei x = 2

Sy(0 / -0,5)



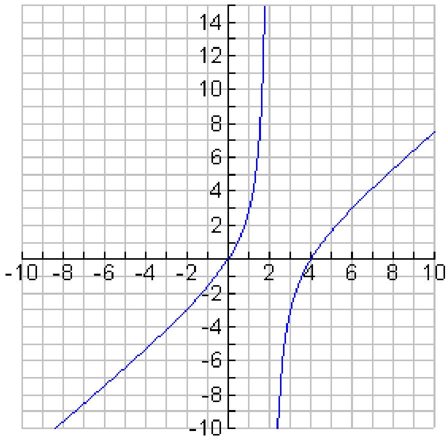
$$g(x)=\frac{x^2-4x}{x-2}$$

Polstelle mit VZW bei x = 2

Nullstellen bei x = 0 und x = 4

Sy(0 / 0)

y-Wert berechnen: $g(6)=\dfrac{6^2-4\cdot 6}{6-2}=\dfrac{36-24}{4}=3$



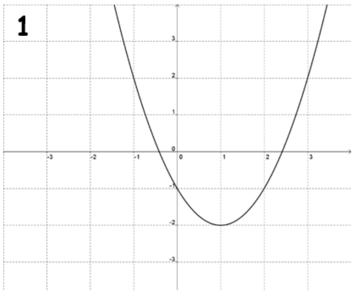
Anmerkung: Bearbeiten Sie entweder die Aufgabe 5 oder die Aufgabe 6.

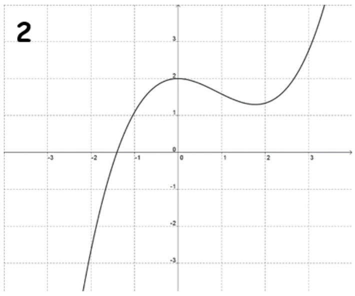
12	

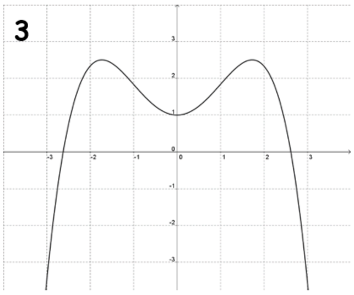
5.) Zuordnung: Funktion – 1. Ableitung

Ordnen Sie die drei Funktionen den Ableitungsgraphen zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung durch zwei Kennzeichen.

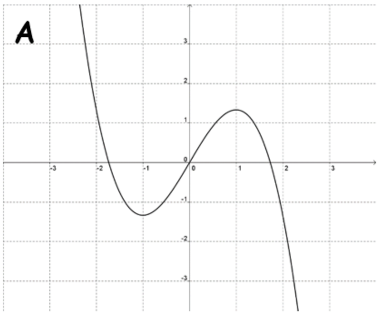
Funktionen

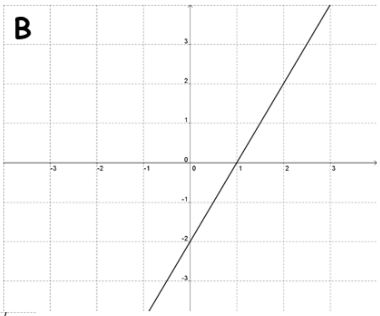


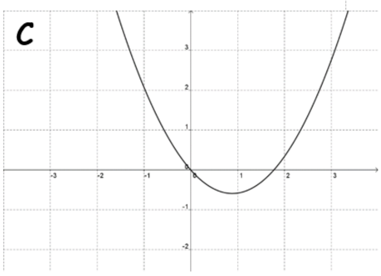




Ableitungen







Zuordnung:

1 $\Leftrightarrow$ B Grad der Funktion n = 2 / Grad der Ableitung n = 1;

Minimum bei x = 1 / Nullstelle der Ableitung bei x = 1

Steigungsverhalten der Funktion von fallend zu steigend /

Ableitung verläuft bis x=1 unterhalb der x-Achse $f'(x) < 0$, danach oberhalb $f'(x) > 0$.

3 ⇔ A Grad der Funktion n = 4 / Grad der Ableitung n = 3;

Minimum bei x = 0 / Nullstelle der Ableitung bei x = 0

Maxima bei x = +/-1,8 / Nullstelle der Ableitung bei x = +/-1,8

2 ⇔ C Grad der Funktion n = 3 / Grad der Ableitung n = 2;

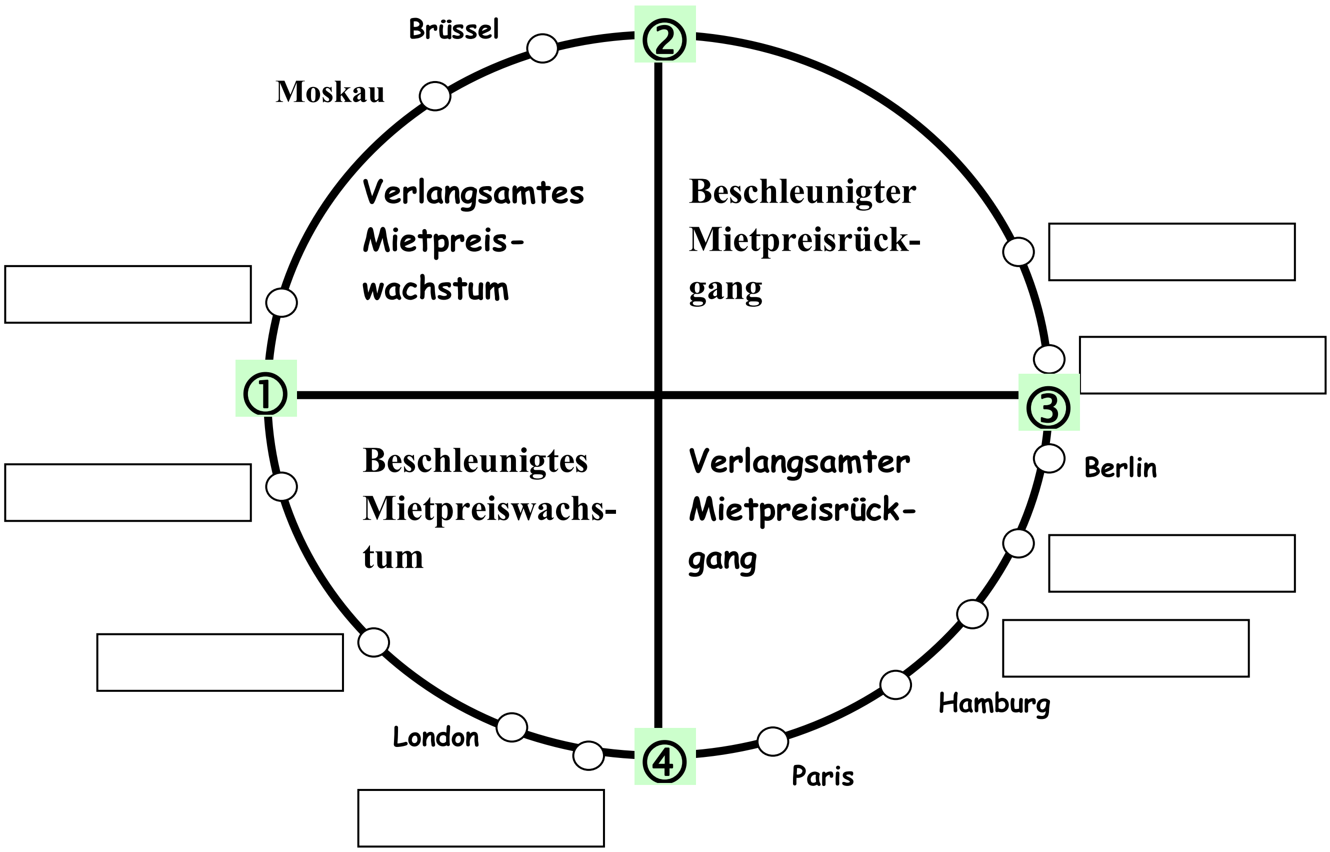
Maximum bei x = 0 / Nullstelle der Ableitung bei x = 0

Minimum bei x = 1,8 / Nullstelle der Ableitung bei x = 1,8

6.) Funktionen in der Realität (rekonstruieren) **12**

„Frankfurt und München gehören zu den europäischen Städten, in denen die Mieten im vergangenen Jahr am stärksten sanken, während sich in Athen die Mietpreisverminderung etwas abschwächte.“, stand am 11.02.2005 im Handelsblatt.

Dazu wurde folgende Immobilienuhr (4. Quartal 2004) veröffentlicht:

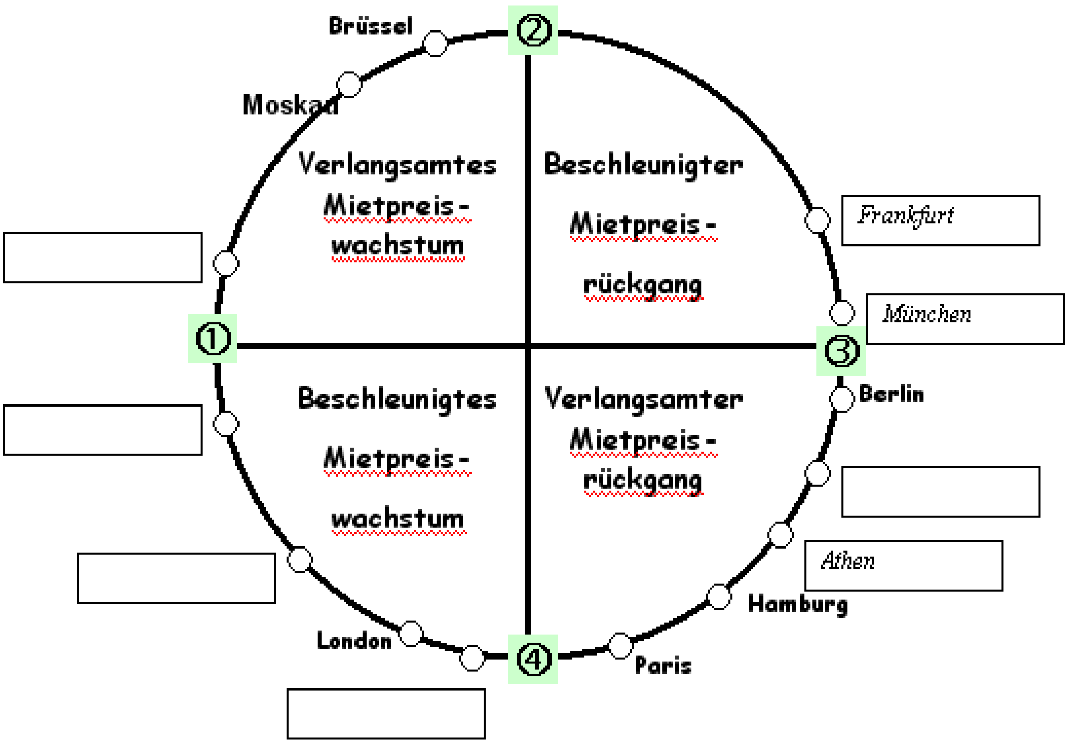


a) Tragen Sie die o.a. drei Städte in die leeren Kästchen ein.

b) Skizzieren Sie beginnend mit der Situation „London“ mit dem Uhrzeigersinn verlaufend eine Funktion des Mietpreises in Abhängigkeit der Zeit: M(t); tragen Sie dann auch die Städte auf der x-Achse ein.

Anwendungsaufgabe zu Funktionen:

Aufgabenstellung 1: Tragen Sie die o.a. drei Städte in die leeren Kästchen ein.



Aufgabenstellung 2:

Skizzieren Sie beginnend mit der Situation „London" mit dem Uhrzeigersinn verlaufend eine Funktion des Mietpreises in Abhängigkeit der Zeit: M(t);
tragen Sie dann auch die Städte auf der x-Achse ein.