11. Jgst.	9. Test	Datum: 30.04.2024
Klasse: GY 23a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Kurvenuntersuchung; Steigung; Ableitungen

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Steigung einer Funktion **16**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x \qquad P(2 \mid y)$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x = \left(\frac{1}{4}x - 2\right)x = 0 \rightarrow x = 0 \quad oder \quad x = 8$$

b) Berechnen Sie die Steigung der Funktion f(x) im Punkt P.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 2 = m \xrightarrow{x=2} \frac{1}{2}\cdot 2 - 2 = -1 = m$$

14

c) Welchen Wert besitzt y im Punkt P?

$$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 4 - 2\cdot 2 = -3 \rightarrow P(2 \mid -3)$$

d) Warum besitzt f(x) keinen Wendepunkt?

Eine Funktion 2. Grades hat eine Konstante als 2. Ableitung; daher ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt. Zudem besitzt eine Funktion 2. Grade nur eine Krümmungsrichtung => aufgrund des fehlenden Wechsels der Krümmungsart, kann kein Wendepunkt vorliegen.

$$f''(x) = \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow \textit{notwendige Bedingung nicht erfüllt}$$

e) Zeigen Sie, dass f(x) genau einen Extremwert besitzt und berechnen Sie diesen.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 2 = 0 \rightarrow x = 4 \qquad f''(x) = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow Min(4 \mid -4)$$

2.) Anwendung zur Kurvenuntersuchung: Die Bergwanderung

Das Höhenprofil eines Berges ist gegeben durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{12.500}\left(-3x^5 + 75x^4 - 625x^3 + 1.875x^2\right) \quad mit\ x\ und\ f(x)\ in\ km$$

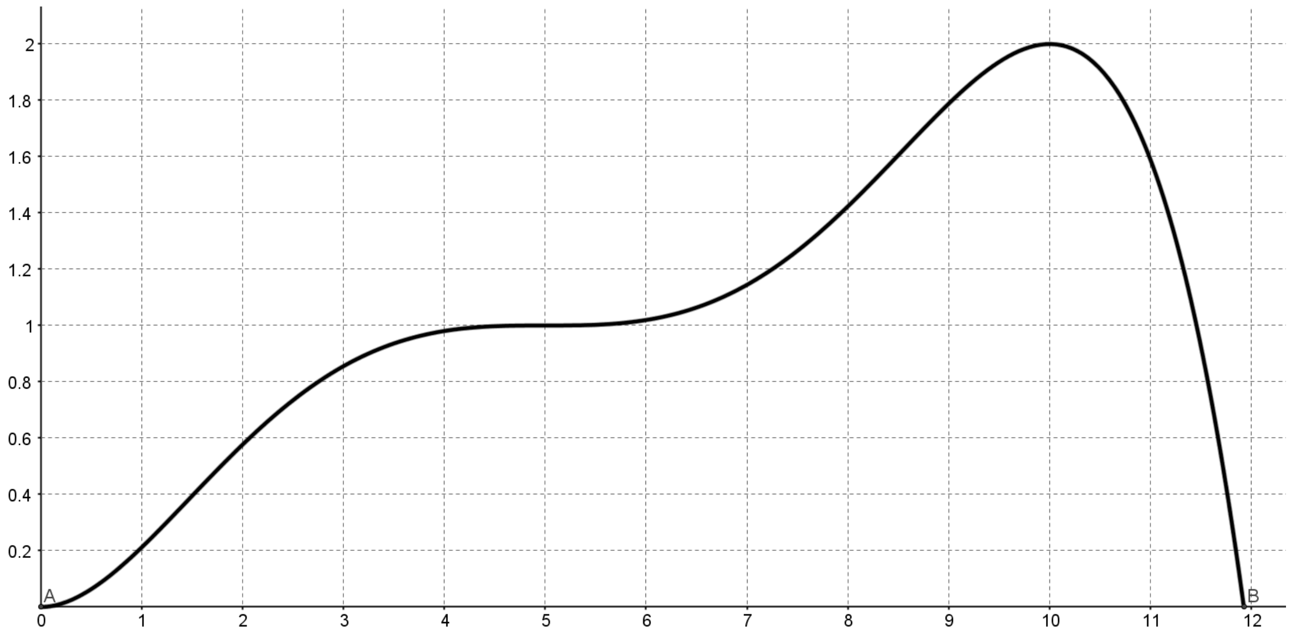
a) Berechnen Sie die Steigungen an den Stellen $x \in \{0\,; 5\,; 10\}$

$$f'(x) = \frac{1}{12.500}\left(-15x^4 + 300x^3 - 1.875x^2 + 3.750x\right)$$
$$f'(0) = 0 = m$$
$$f'(5) = \frac{1}{12.500}\left(-15\cdot 5^4 + 300\cdot 5^3 - 1.875\cdot 5^2 + 3.750\cdot 5\right) = 0 = m$$
$$f'(10) = \frac{1}{12.500}\left(-15\cdot 10^4 + 300\cdot 10^3 - 1.875\cdot 10^2 + 3.750\cdot 10\right) = 0 = m$$

b) An diesen drei Stellen ist der Zahlenwert identisch.
Erklären Sie welches Verhalten die Funktion an diesen Stellen besitzt.

An den Stellen x = 0 und x = 10 liegen Extrema vor; an der Stelle x = 5 haben wir einen Sattelpunkt.

c) Beschreiben Sie die Tour mit eigenen Worten für einen Reiseführer,
indem Sie auf folgende Punkte eingehen:
Länge, Höhenprofil, Steigungsverhalten, Anstrengungsgrad …



Eigene Formulierungen möglich;
Länge: ca. 12 km
Steigungsverhalten: Anstieg bis Streckenkilometer 10, wobei bei km 5 eine flache Teilpassage in Form einer „Terrasse" bzw. eines Bergsattels vorliegt.
Höchster Punkt (= Gipfel) liegt bei Streckenkilometer 10 auf einer Höhe von 2.000 m üNN; danach verläuft der Weg sehr steil bergab mit m = -1 => Bergsteigerausrüstung beim Abstieg erforderlich, da hier eine durchschnittliche negative Steigung (=Gefälle) von 100 % vorliegt.

In der Summe eine äußerst anstrengende Tour.

3.) **Tangente berechnen** | 10 | |

Folgende Funktion sei gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + 2$

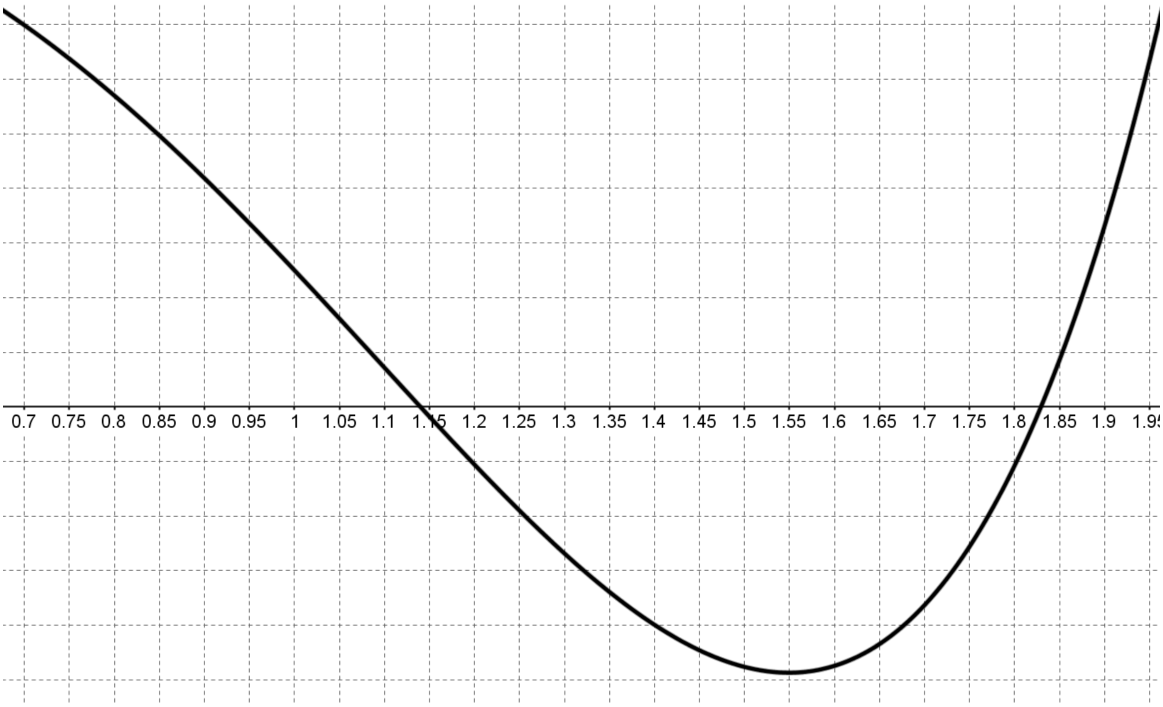
a) Berechnen Sie die Tangente der Funktion an der Stelle x = 1.

$$f(1) = \frac{1}{2} - 2 + 2 = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 = m \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{5}{2} - 6 = -3{,}5 = m$$

$$y-Achsenabschnitt: \quad y = mx + b \rightarrow 0{,}5 = -3{,}5 \cdot 1 + b \rightarrow 4 = b \rightarrow y = -3{,}5x + 4$$

b) Erläutern Sie das Vorgehen zur Nullstellenberechnung durch die Newton-Iteration an der Stelle x = 1.
Bitte durch Beschreibung der Arbeitsschritte und mittels graphischer Darstellung:



Herleitung des Newtonverfahrens auf der Basis: Steigung der Tangente = Steigung der Funktion

5	

ZUSATZAUFGAUFTRAG:

Bestimmen Sie die 1. Näherung zur Ermittlung der Nullstelle mit Hilfe der Berechnungsformel $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ und der Anwendung des Horner-Schemas.

Startwert: x = 1

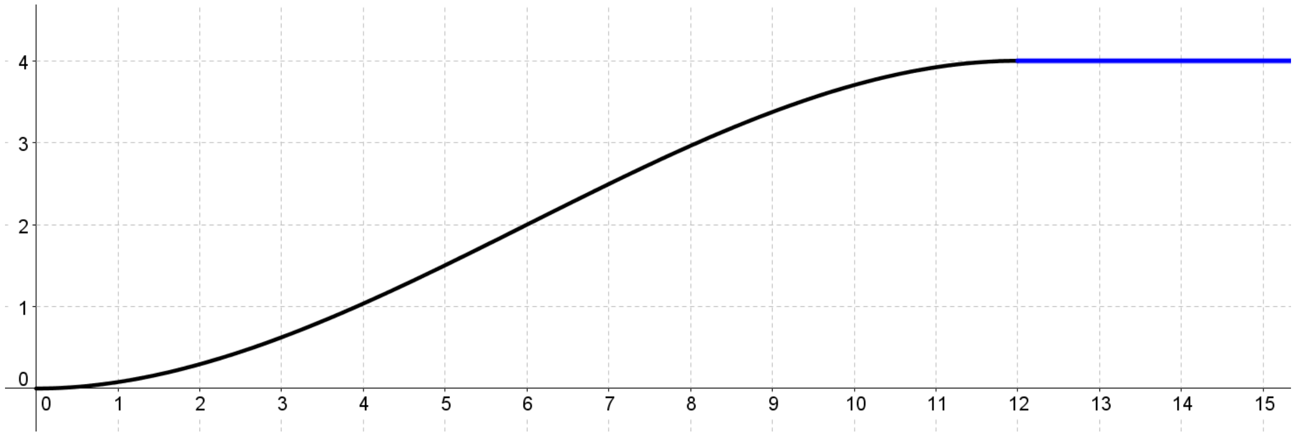
	$0,5$	0	-2	0	0	2
$x=1$		$0,5$	$0,5$	$-1,5$	$-1,5$	$-1,5$
	$0,5$	$0,5$	$-1,5$	$-1,5$	$-1,5$	$\boxed{0,5=f(1)}$
$x=1$		$0,5$	1	$-0,5$	-2	
	$0,5$	1	$-0,5$	-2	$-3,5=f'(1)$	

$$\textit{Näherung}\,1: \quad x = 1-\frac{0,5}{-3,5} = 1+\frac{1}{7} = \frac{8}{7}$$

4.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion 14

Bei der Planung eines Parkhauses soll die erste Parkebene in einer Höhe von 4 m mit dem Erdboden durch eine Auffahrt für die Fahrzeuge verbunden werden.
Die horizontale Länge der Auffahrt soll 12 m betragen.
Der Graph der nachfolgenden Funktion f(x) soll die Situation modellieren:

$$f(x) = -\frac{1}{216}x^3 + \frac{1}{12}x^2 \quad \text{mit } x \text{ und } f(x) \text{ in m}$$



a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der gesamten Auffahrt mit Hilfe des Differenzenquotients.

b) An welcher Stelle befindet sich die maximale Steigung der Auffahrt?

c) Beurteilen Sie, ob die Auffahrt zum Befahren durch die Fahrzeuge geeignet ist, wenn bekannt ist, dass eine maximale Steigung von 35 % überwunden werden kann.